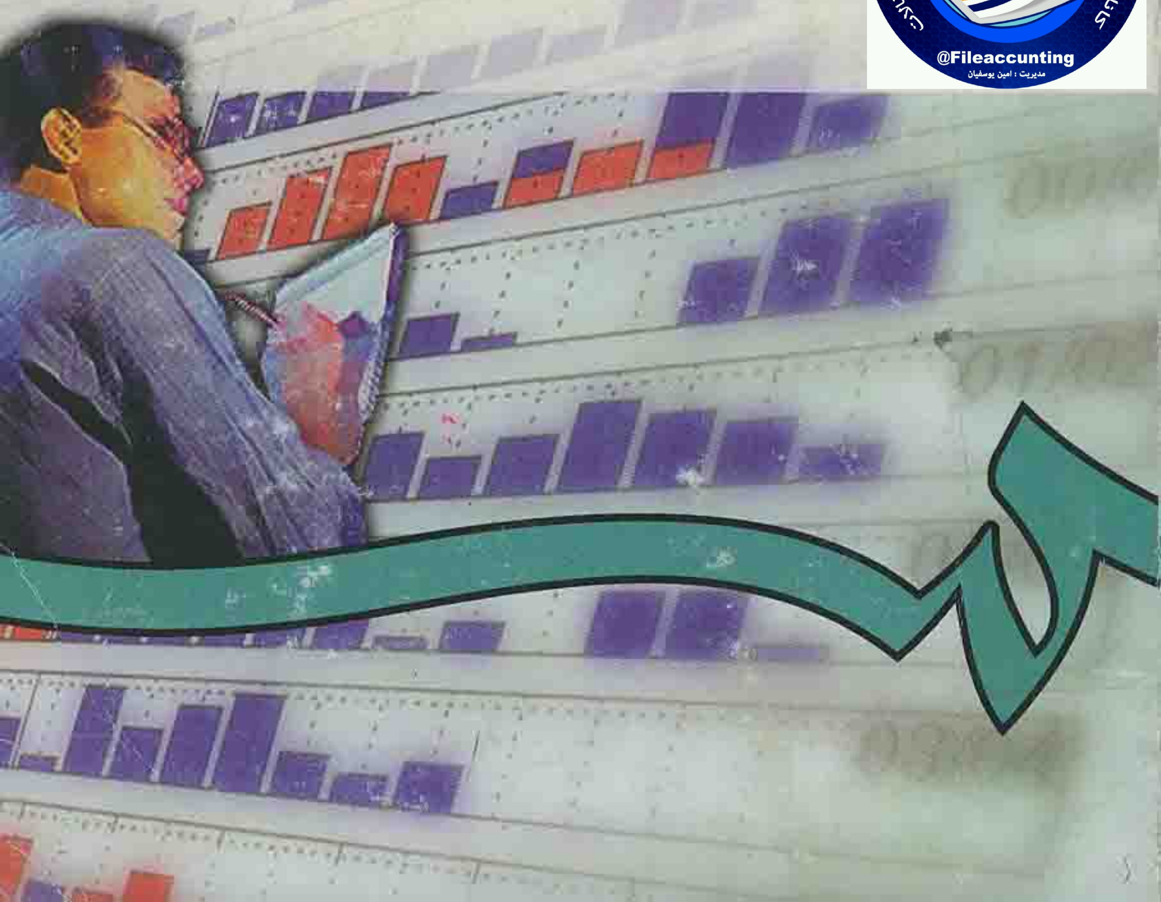
آمار و کاربرد آن در مدیریت

جلد دوم

تحلیل آماری

دکتر عادل آذر
دکتر منصور مؤمنی

کانال بایگانی فایل های حسابداری ، حسابرسی ، مالیاتی و مقالات
@Fileaccunting
مدیریت : امین یوسفیان



کانال بایگانی فایل های حسابداری ، حسابرسی ، مالیاتی و مقالات
@Fileaccunting
مدیریت : امین یوسفیان

آمار و کاربرد آن در مدیریت

جلد دوم

تحلیل آماری

دکتر عادل آذر
دکتر منصور مؤمنی

تهران
۱۳۸۰

سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهها (سمت)

مدیریت ۱۸

آذر، عادل، ۱۳۴۵ -

آمار و کاربرد آن در مدیریت/ عادل آذر، منصور مؤمنی. — تهران: سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهها (سمت)، ۱۳۸۰.

۲ ج.: مصور، جدول، عکس، نمودار. — (سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهها (سمت)؛ ۱۸۹، ۲۷۴. مدیریت؛ ۱۲، ۱۸).

۶۰۰۰ ریال: (ج. ۱). ISBN 964-459-189-5

۱۱۵۰۰ ریال: (ج. ۲) ISBN 964-459-274-3

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

پشت جلد به انگلیسی: Adel Azar, Mömeny Mansoor. Statistics and Its Application in Management(Statistical Analysis).

واژه‌نامه.

کتابنامه.

ج. ۲ (چاپ پنجم: ۱۳۸۰).

۱. آمار. ۲. مدیریت ـ روشهای آماری. ۳. مدیریت ـ آمار. الف. مؤمنی، منصور، گردآورنده. ب. سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهها (سمت). ج. عنوان.

۴آ۲آف/HA۲۹/۵ ۰۰۱/۴۲۲

کتابخانه ملی ایران ۷۷-۶۳۵۹م

سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهها (سمت)

آمار و کاربرد آن در مدیریت (تحلیل آماری)، جلد دوم

دکتر عادل آذر و دکتر منصور مؤمنی

چاپ اول: ۱۳۷۷

چاپ پنجم: پاییز ۱۳۸۰

تعداد: ۱۵۰۰۰

حروفچینی و لیتوگرافی: سمت

چاپ: مهر (قم)

قیمت: ۱۱۵۰۰ ریال. در این نوبت چاپ قیمت مذکور ثابت است و فروشندگان و عوامل توزیع مجاز به تغییر آن نیستند.

کلیه حقوق اعم از چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و جز اینها برای «سمت» محفوظ است (نقل مطالب با ذکر مأخذ بلامانع است).

کانال بایگانی فایل های حسابداری ، حسابرسی ، مالیاتی و مقالات
@Fileaccunting
مدیریت : امین یوسفیان

سخن «سمت»

یکی از اهداف مهم انقلاب فرهنگی، ایجاد دگرگونی اساسی در دروس علوم انسانی دانشگاهها بوده است و این امر، مستلزم بازنگری منابع درسی موجود و تدوین منابع مبنایی و علمی معتبر و مستند با درنظر گرفتن دیدگاه اسلامی در مبانی و مسائل این علوم است.

ستاد انقلاب فرهنگی در این زمینه گامهایی برداشته بود، اما اهمیّت موضوع اقتضا می‌کرد که سازمانی مخصوص این کار تأسیس شود و شورای عالی انقلاب فرهنگی در تاریخ ۶۳/۱۲/۷ تأسیس «سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهها» را که به اختصار «سمت» نامیده می‌شود، تصویب کرد.

بنابراین، هدف سازمان این‌است که با استمداد از عنایت خداوند وهمّت و همکاری دانشمندان و استادان متعهد و دلسوز، به مطالعات و تحقیقات لازم بپردازد و در هر کدام از رشته‌های علوم انسانی به تألیف و ترجمهٔ منابع درسی اصلی، فرعی و جنبی اقدام کند.

دشواری چنین کاری بر دانشمندان و صاحبنظران پوشیده نیست و به‌همین جهت مرحلهٔ کمال مطلوب آن، باید بتدریج و پس از انتقادها و یادآوریهای پیاپی ارباب‌نظر به‌دست آید و انتظار دارد که این بزرگواران از این همکاری دریغ نورزند.

کتاب حاضر برای دانشجویان رشته مدیریت در مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد به عنوان منبع اصلی دروس «آمار و کاربرد آن در مدیریت (۱) و (۲)» و «تحلیل آماری» تدوین شده است. امید است علاوه بر جامعهٔ دانشگاهی، مدیران سازمانهای دولتی، صنایع و واحدهای بازرگانی نیز از آن بهره‌مند شوند.

از استادان و صاحبنظران ارجمند تقاضا می‌شود با همکاری، راهنمایی و پیشنهادهای اصلاحی خود، این سازمان را در جهت اصلاح کتاب حاضر و تدوین دیگر آثار مورد نیاز جامعهٔ دانشگاهی جمهوری اسلامی ایران یاری دهند.

کانال بایگانی فایل های حسابداری ، حسابرسی ، مالیاتی و مقالات
@Fileaccunting
مدیریت : امین یوسفیان

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل نهم: نمونه گیری و توزیعهای نمونه گیری	۱
۹ـ۱ دلایل نمونه گیری	۲
۹ـ۲ روشهای نمونه گیری	۳
۹ـ۳ روش نمونه گیری تصادفی ساده با جایگذاری و بدون جایگذاری	۸
۹ـ٤ توزیعهای نمونه گیری	۱۰
۹ـ٥ خواص مطلوب آماره‌ها	۱٦
۹ـ٦ قضیهٔ حد مرکزی	۲۱
۹ـ۷ نظریه دربارهٔ رفتار $\bar{x}$	۲۸
۹ـ۸ توزیع نمونه گیری نسبت موفقیت در نمونه $(\bar{p})$	۳۱
۹ـ۹ خلاصه	۳٦
۹ـ۱۰ سؤالات و مسائل	۳٦
پاسخنامهٔ سؤالات	٤۰
فصل دهم: تخمین آماری	٤۱
۱۰ـ۱ مقدمه	٤۱
۱۰ـ۲ تخمین فاصله‌ای میانگین جامعهٔ آماری (μ_x)	٤۲
۱۰ـ۳ تخمین فاصله‌ای تفاضل میانگین دو جامعه $(\mu_1-\mu_2)$	٥٤
۱۰ـ٤ تخمین فاصله‌ای نسبت موفقیت جامعه	٦۱
۱۰ـ٥ تخمین فاصله‌ای تفاضل نسبت موفقیت در دو جامعه (p_1-p_2)	٦۳
۱۰ـ٦ تعیین اندازه نمونه	٦٦
۱۰ـ۷ تخمین فاصله‌ای واریانس جامعه (σ_x^2)	۷۳
۱۰ـ۸ تخمین فاصله‌ای نسبت واریانس دو جامعهٔ آماری $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$	۷٦
۱۰ـ۹ خلاصه	۸۱
۱۰ـ۱۰ سؤالات و مسائل	۸۱
پاسخنامهٔ سؤالات	۸۷

صفحه	عنوان

فصل یازدهم: آزمون فرض آماری ۸۸
۱۱ـ۱ مقدمه ۸۸
۱۱ـ۲ فرض صفر و فرض مقابل ۸۹
۱۱ـ۳ سطح معنی‌دار و خطاهای آماری ۹۱
۱۱ـ٤ توزیع نمونه گیری آماره ۹۵
۱۱ـ۵ آزمون فرض یک دنباله و دو دنباله ۹٦
۱۱ـ٦ مراحل عمومی آزمون فرض آماری ۹۹
۱۱ـ۷ آزمون فرض آماری میانگین یک جامعه (μ_x) ۱۰۱
۱۱ـ۸ آزمون مقایسهٔ میانگین دو جامعهٔ آماری ۱۰۵
۱۱ـ۹ آزمون مقایسهٔ زوجها ۱۰۹
۱۱ـ۱۰ آزمون فرض نسبت موفقیت در جامعه (p) ۱۱۵
۱۱ـ۱۱ آزمون فرض مقایسهٔ نسبت موفقیت در دو جامعهٔ آماری ۱۱۸
۱۱ـ۱۲ آزمون فرض آماری برای واریانس جامعه ۱۲۰
۱۱ـ۱۳ آزمون فرض آماری برای مقایسهٔ واریانس دو جامعه ۱۲۳
۱۱ـ۱٤ خلاصه ۱۲۷
۱۱ـ۱۵ سؤالات و مسائل ۱۲۷
پاسخنامهٔ سؤالات ۱۳٤
فصل دوازدهم: تحلیل واریانس ۱۳۵
۱۲ـ۱ مقدمه ۱۳۵
۱۲ـ۲ تحلیل واریانس یک عامله ۱۳۷
۱۲ـ۳ طرح آزمایشها ۱٤۵
۱۲ـ٤ تحلیل واریانس دو عامله ۱٤۷
۱۲ـ۵ ملاحظات بیشتر ۱۵۹
۱۲ـ٦ سؤالات و مسائل ۱٦۰
پاسخنامهٔ سؤالات ۱٦۲
فصل سیزدهم: رگرسیون خطی ساده و همبستگی ۱٦۳
۱۳ـ۱ مقدمه ۱٦۳
۱۳ـ۲ انواع روابط بین دو متغیر و نمودار پراکنش ۱٦٤
۱۳ـ۳ روش حداقل توانهای دوم ۱٦۸
۱۳ـ٤ تحلیل رگرسیون و استنباط آماری ۱۷۲
۱۳ـ۵ رگرسیون و تحلیل واریانس ۱۷۹

عنوان	صفحه

۱۳ـ۶ همبستگی	۱۸۲
۱۳ـ۷ احتیاط در استفاده از خط رگرسیون و همبستگی	۱۹۰
۱۳ـ۸ سؤالات و مسائل	۱۹۱
پاسخنامهٔ سؤالات	۱۹۵
فصل چهاردهم: رگرسیون چندگانه و غیرخطی	۱۹۶
۱۴ـ۱ رگرسیون چندگانه	۱۹۶
۱۴ـ۲ کامپیوتر و رگرسیون	۲۰۰
۱۴ـ۳ استنباط در خصوص پارامترهای جامعه در رگرسیون چندگانه	۲۰۴
۱۴ـ۴ آزمون خطی بودن	۲۰۸
۱۴ـ۵ رگرسیون نمایی و سهمی	۲۱۲
۱۴ـ۶ سؤالات و مسائل	۲۱۸
پاسخنامهٔ سؤالات	۲۲۰
فصل پانزدهم: کاربردهای آزمون کای ـ مربع در مدیریت	۲۲۱
۱۵ـ۱ مقدمه	۲۲۱
۱۵ـ۲ آزمون استقلال	۲۲۲
۱۵ـ۳ آزمون همگونی	۲۲۸
۱۵ـ۴ فراوانیهای کوچک مورد انتظار	۲۳۲
۱۵ـ۵ آزمون نیکویی برازش	۲۳۳
۱۵ـ۶ اصلاح یتس	۲۴۳
۱۵ـ۷ خلاصه	۲۴۴
۱۵ـ۸ سؤالات و مسائل	۲۴۵
پاسخنامهٔ سؤالات	۲۴۹
فصل شانزدهم: روشهای ناپارامتری	۲۵۰
۱۶ـ۱ مقدمه	۲۵۰
۱۶ـ۲ آزمون علامت	۲۵۱
۱۶ـ۳ آزمون رتبهٔ علامت‌دار	۲۵۶
۱۶ـ۴ آزمونهای مجموع رتبه‌ها	۲۶۰
۱۶ـ۵ آزمون مبتنی بر ردیفها (آزمون استقلال)	۲۶۵
۱۶ـ۶ ضریب همبستگی رتبه‌ای	۲۷۰
۱۶ـ۷ آزمون کولموگوروف ـ اسمیرنوف	۲۷۴
۱۶ـ۸ سؤالات و مسائل	۲۷۷

عنوان	صفحه
پاسخنامهٔ سؤالات	۲۸۲
فصل هفدهم: تحلیل سریهای زمانی و مدلهای پیش‌بینی	۲۸۳
۱ـ۱۷ مقدمه	۲۸۳
۲ـ۱۷ اجزای تشکیل دهندهٔ سری زمانی	۲۸٤
۳ـ۱۷ مدلهای کمّی پیش‌بینی	۲۸۸
٤ـ۱۷ مدلهای پیش‌بینی کیفی	۳۲۲
۵ـ۱۷ مدلهای تلفیقی	۳۲٦
٦ـ۱۷ خلاصه	۳۲۷
۷ـ۱۷ سؤالات و مسائل	۳۲۹
پاسخنامهٔ سؤالات	۳۳۳
فصل هجدهم: نظریهٔ تصمیم	۳۳٤
۱ـ۱۸ مقدمه	۳۳٤
۲ـ۱۸ شش‌گام در نظریهٔ تصمیم	۳۳٤
۳ـ۱۸ انواع شرایط تصمیم‌گیری	۳۳۷
٤ـ۱۸ تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان	۳۳۹
۵ـ۱۸ تصمیم‌گیری در شرایط ریسک	۳٤٤
٦ـ۱۸ ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل	۳۵۰
۷ـ۱۸ استفاده از اطلاعات نمونه: قضیهٔ بیز	۳۵۳
۸ـ۱۸ مباحث دیگر	۳۵٦
۹ـ۱۸ خلاصه	۳۵۷
۱۰ـ۱۸ سؤالات و مسائل	۳۵۸
پاسخنامهٔ سؤالات	۳٦۲
پیوست	۳٦۳
منابع و مآخذ	۳۸۵
واژه‌نامه	۳۸۸

کانال بایگانی فایل های حسابداری ، حسابرسی ، مالیاتی و مقالات
@Fileaccunting
مدیریت : امین یوسفیان

فصل نهم

نمونه گیری و توزیعهای نمونه گیری

در بسیاری از زمینه‌های کاربردی، محققان درصدد تعیین پارامترهای جامعه هستند؛ ولی دسترسی به آنها به طور مستقیم با سرشماری جامعهٔ آماری امکانپذیر نیست. در چنین موقعیتهایی، محققان ناچارند به نمونه‌هایی از جوامع آماری برای استنباط پارامترهای موردنظر اکتفا کنند.

اگر پارامتر را شاخص به دست آمده از جامعهٔ آماری با استفاده از سرشماری بنامیم، پس باید شاخص به دست آمده از یک نمونه n تایی از جامعه را «آماره» نامید. همچنان که در فصل اول نیز بیان شد یکی از مهمترین جنبه‌های آمار استنباطی تعمیم آماره به پارامتر است که در این فصل مقدمات این مهم فراهم خواهد شد.

از آنجا که اندازه‌های نمونه[1]، از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر در تغییرند، پس مقدار یک «آماره» از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر تغییر خواهد کرد. بنابراین برای دستیابی به پایایی[2] استنباط براساس آمارهٔ محاسبه شده از نمونه، باید به تعیین یا تقریب توزیع آن آماره قادر بود. توزیع آماره، آن تابع احتمالی است که از نمونه گیری مکرر حاصل می‌شود و در شکل کاملتر خود آن را «توزیع نمونه گیری آماره»[3] می‌گویند.

شناخت توزیع نمونه گیری آماره به آمارگر اجازه می‌دهد که از میان آماره‌های مختلف بهترین را برای تخمین پارامتر مورد نظر انتخاب کند، همچنین کمک می‌کند که ضمن تعیین محدودیتهای برآوردکننده[4]، درجهٔ خطای برآورد نیز تعیین شود.

---

1. sample measurement
2. reliability
3. statistic sampling distribution (SSD)
4. estimator

قبل از ورود به بحث توزیع آماره و خواص آن، ابتدا ضرورت و روشهای نمونه گیری ـ که الفبای هر نوع کاربرد آمار استنباطی است ـ بررسی و سپس بتفصیل به موضوع توزیعهای نمونه گیری پرداخته می‌شود.

۱ـ۹ دلایل نمونه گیری

دلایل مختلفی وجود دارد که معمولاً محققان از سرشماری کل جامعه صرف‌نظر کرده، به تعداد معدودی از عناصر جامعه (یعنی نمونه) اکتفا می‌کنند، این دلایل در پنج دسته به شرح زیر طبقه‌بندی شده‌اند:

۱. هزینه. اغلب نمونه می‌تواند اطلاعات قابل اعتماد و مفیدی با هزینه‌ای کمتر از سرشماری فراهم کند؛ مثلاً هزینهٔ سرشماری همهٔ مدیران به منظور کسب اطلاعاتی در خصوص سبک مدیریت آنها بسیار زیاد است، در حالی که نمونه‌ای از جامعه مدیران می‌تواند با کسری از این هزینه، داده‌هایی با قابلیت اعتماد کافی فراهم کند.

۲. به روز بودن.[1] نمونه اغلب اطلاعاتی بهنگام تراز سرشماری به دست می‌دهد؛ زیرا داده‌های کمتری جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل می‌شوند. این جنبه از نمونه، بخصوص زمانی که اطلاعات برای تصمیم‌گیری سریع مورد نیاز باشد، اهمیت بیشتری پیدا می‌کند؛ برای مثال چنانچه هدف، بررسی خط تولید برای کنترل آن باشد، بررسی کیفیت کل محصولات تولیدشده در یک روز غیرممکن به نظر می‌رسد، مگر اینکه در طول تولید، نمونه‌های لازم انتخاب شود.

۳. درستی. نمونه اغلب اطلاعاتی به درستی سرشماری و یا حتی درست‌تر از آن فراهم می‌کند؛ زیرا خطاهای جمع‌آوری داده‌ها را در یک کار تحقیقی کوچک بهتر از یک کاربزرگ می‌توان کنترل کرد؛ بنابراین با استفاده از نمونه گیری می‌توان به نیروهای محقق آموزش لازم را داده، آنها را راحت‌تر از سرشماری کنترل و نظارت کرد.

٤. زمان. سرشماری کل جامعه آماری به زمان طولانی نیاز دارد. به طوری که گاهی زمان تحقیق و دسترسی به عناصر جامعه به اندازه‌ای طولانی است که کاربرد آن را منتفی می‌سازد. به همین جهت با انتخاب نمونه‌ای از جامعه می‌توان با

1. up to date

زمان کمتر اطلاعات تفصیلی تری به دست آورد.

۵. آزمون تخریب‌کننده. وقتی آزمونی موجب خراب‌شدن یک کالا می‌شود، باید نمونه گیری را به کار برد. این امر در صنایع نظامی که کنترل کیفیت کالا همراه با تخریب است، بیشتر مصداق دارد و یا مدیر تولید یک کارخانه تولید لامپ، اگر بخواهد پس از کنترل برای فروش نیز لامپی بماند باید از نمونه استفاده کند.

۲-۹ روشهای نمونه گیری

صرف نظر از اینکه استفاده از چه روش آمار استنباطی مورد نظر است، قدرت آن روش به روش به کار گرفته شده برای انتخاب نمونه بستگی دارد. در صورتی که نمونه، نماینده واقعی جامعه نباشد، به عبارت دیگر اگر نمونه دارای اریب[1] باشد، پیش‌بینی صحیح و دقیق دربارهٔ پارامتر (های) جامعه امکان نخواهد داشت.

اریب در نمونه گیری را می‌توان با به کاربردن روشهای نمونه گیری صحیح و مناسب و در نظرگرفتن مشخصات عناصر جامعه کاهش داد. به دیگر سخن استنباط با استفاده از چنین نمونه‌هایی دارای پایایی خواهد بود. این امر صرفاً بدین دلیل است که اصول نمونه گیری تصادفی، اساس نظریه آمار استنباطی را شکل می‌دهند. این اصول برپایه شانس و احتمال بنا شده‌اند. روشهای نمونه گیری که در زیر بحث خواهد شد روشهای مناسبی برای نمونه گیری تصادفی‌اند.

۱. نمونه گیری تصادفی ساده

در نمونه گیری تصادفی ساده هریک از عناصر جامعهٔ مورد نظر برای انتخاب شدن، شانس مساوی دارند. در این روش افراد یا اشیای مورد نیاز از فهرست جامعه آماری‌ای که به همین منظور شماره گذاری و تهیه شده است به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند. مطابق قانون احتمال، افراد انتخاب شده باید دارای ویژگیهایی همانند جامعه‌ای که از آن انتخاب شده‌اند، باشند.

نمونه گیری تصادفی را به روشهای مختلف می‌توان انجام داد. دو گونه از این روشها شرح داده‌می‌شود:

---

1. bias

الف) قرعه کشی. قرعه کشی با هر کدام از روشهای معمول آن نوعی نمونه‌برداری است؛ مثلاً اگر بخواهیم از میان ۶۰ نفر نمونه‌ای ۱۲ نفری به روش تصادفی انتخاب کنیم، کافی است نام یا شمارهٔ ردیف این عده را بدون رعایت ترتیب خاصی روی ۶۰ کارت مختلف بنویسیم و کارتها را در یک جعبه قرار دهیم. سپس کارتها را کاملاً مخلوط کرده، ۱۲ کارت را یکی پس از دیگری انتخاب کنیم.

ب) جدول اعداد تصادفی. فراهم آوردن وسایل قرعه کشی بی‌نقص، مخصوصاً در گروههای بزرگ کارآسانی نیست. به جای آن می‌توان از جدول اعداد تصادفی[1] استفاده کرد. در جدول اعداد تصادفی ارقام ۰ تا ۹ در تعدادی سطر و ستون گردآوری شده‌اند. ترتیب استخراج و تنظیم این اعداد به صورت کاملاً تصادفی با روشها و وسایلی مانند قرعه کشی و کامپیوتر انجام می‌گیرد. نمونه‌ای از چنین مجموعهٔ تصادفی اعداد در جدول ۱ پیوست کتاب ملاحظه می‌شود. این جدول صد ردیف و صد ستون دارد که در دو صفحه فراهم شده است. تنظیم اعداد در گروههای ۵×۵ فقط به منظور قرائت آسان اعداد انجام گرفته است. خاصیت اصلی این جدول آن است که احتمال پیش‌آمدن ارقام ۰ تا ۹ در هر نقطهٔ آن (در هر سطر یا ستون یا گروه چند در چند آن) برای همهٔ ارقام یکسان و مقداری ثابت است.

روش استفاده از این جدول برای تشکیل نمونهٔ تصادفی با مثال $N = ۶۰$ و $n = ۱۲$ تشریح می‌شود. مراحل نمونه‌برداری عبارتند از:

مرحله اول، افراد جامعه را از ۱ تا N شماره گذاری کنید. بهتر است این شماره گذاری بدون رعایت ترتیب خاصی انجام گیرد.

مرحله دوم، به طور تصادفی عددی را به عنوان مبدأ نمونه‌برداری در جدول انتخاب کنید؛ برای مثال عدد ۳ که در تقاطع سطر ۱۲ و ستون ۵ (صفحه اول، جدول ۱ پیوست) واقع شده‌است.

مرحله سوم، از این مبدأ، ردیفهایی به تعداد ارقام N در نظر بگیرید. در این مثال چون N دو رقمی است ردیفهای دوتایی اختیار کنید، ولی ساده‌تر آن است که ابتدا ردیفهای عمودی و مجاور هم به کار روند. سپس از ردیف دو ستونی‌ای که با اعداد ۳۷، ۵۲ و ۰۹ شروع می‌شود، استفاده شود.

---

1. random digits table

مرحلهٔ چهارم، اعداد ردیفهای انتخاب شده به ترتیب خوانده می‌شود. N عدد متناسب با شماره گذاری جامعه، شماره ردیف افرادی را نشان می‌دهد که باید در نمونه انتخاب شوند. عدد متناسب، عددی است که در فاصلهٔ ۱ تا N واقع شده است. پس در این مثال، ۱۲ نفری که با شماره‌های ۲۷، ۵۲، ۰۹، ۰۳، ۱۲، ۲۱، ۴۳، ۰۱، ۱۳، ۴۲، ۳۳ و ۲۷ مشخص شده‌اند، نمونهٔ تصادفی مورد نظر را تشکیل خواهند داد. توجه داشته باشید:

اول آنکه، اعدادی مانند ۷۵، ۷۷ و ٦٧ را که خارج از دامنهٔ شماره گذاری جامعه هستند به حساب نیاورید.

دوم آنکه، هر عدد مکرر مانند ۱۲ و ۲۷ را فقط یک بار به حساب آورید.

سوم آنکه، اگر عدد N ضریب کامل ۱۰ باشد ($۱۰۰ = ۱۰^۲$، $۱۰۰۰ = ۱۰^۳$ و غیره)، عدهٔ ستونها یک واحد کمتر از N اختیار می‌شود. مثلاً در جامعهٔ ۱۰۰ نفری می‌توان با دو ستون اعداد تصادفی نمونه‌برداری کرد و عدد ۰۰ را به جای شماره ۱۰۰ پذیرفت. این روش ساده‌تر به منزلهٔ این‌است که افراد جامعه به جای ۱ تا N از ۰ تا $N-۱$ شماره گذاری خواهند شد.

یکی از مشکلات این روش، تهیه و تدوین فهرست افراد جامعهٔ آماری است، چرا که در خیلی از موارد چنین کاری قبلاً انجام نشده است.

۲. نمونه گیری منظم

روش نمونه گیری منظم[1]، روش تغییر شکل‌یافته نمونه گیری تصادفی ساده است. در این روش عناصر نمونه از فهرست افراد یا اعضای جامعه آماری که به همین منظور آماده شده است، انتخاب می‌شوند؛ برای مثال فرض کنید از جامعه‌ای که دارای ۲ هزار عضو است، می‌خواهیم ۱۰۰ عضو را انتخاب کنیم. نمونه مورد نظر را می‌توان از روی فهرست، ۲۰ نفر، ۲۰ نفر انتخاب کرد ($۲۰ = ۱۰۰ \div ۲۰۰۰$). نقطهٔ شروع نمونه گیری عبارت است از هر عضوی که دارای شماره مساوی یا کوچکتر از ۲۰ است. این نقطه به صورت تصادفی انتخاب خواهد شد.

این روش برای آن دسته از جوامع آماری که کد از پیش تعیین شده و مرتبی دارند

1. systematic sampling

(همانند شماره کارمندی، شماره دانشجویی و شماره پلاک منازل) کاربرد فراوان دارد. با مشخص شدن اولین عضو نمونه، سایر اعضای نمونه در این روش معین خواهند شد. این خاصیت از یک سو به عنوان یکی از محاسن روش تلقی شده و از سوی دیگر موجب از دست رفتن شانس انتخاب برای سایر اعضای جامعه است. به عبارت دیگر خاصیت تصادفی بودن عناصر نمونه برخلاف روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با علامت سؤال (؟) همراه است.

۳. نمونه‌گیری گروهی

برای بیشتر کردن شباهت نمونه و جامعه و افزایش دقت نمونه‌برداری برای برآورد پارامترهای جامعه و دخالت دادن ویژگیهای جامعه در نمونه، در روش نمونه‌گیری گروهی[1]، جامعه به گروههای متجانس تقسیم و هر گروه از افرادی تشکیل می‌شود که دارای ویژگیهای مشابه هستند. پس از تقسیم جامعه به گروههای متجانس، تعداد نمونه نسبت به هر گروه مشخص شده، سپس با استفاده از روش نمونه‌گیری تصادفی ساده یا منظم، تعداد عناصر مورد نیاز از هر گروه انتخاب خواهد شد.

مثال ۱ـ۹ هدف از این تحقیق بررسی وضعیت عملکرد در واحدهای مختلف سازمان است. مدیریت سازمان اعتقاد دارد که میزان عملکرد تحت تأثیر واحد سازمانی است. در این تحقیق تعداد کارمندان در هر واحد به این صورت مشخص شده‌اند: واحد مالی ۱۸۰ نفر، واحد اداری ۲۲۸ نفر، واحد تولید ۱۳۳ نفر و واحد خدمات ۵۹ نفر.

بررسیها نشان می‌دهد که یک نمونهٔ ۸۰ نفره باید از کل سازمان انتخاب شود. تعداد نمونه‌ها را برحسب هر گروه (واحد) مشخص کنید.

از آنجا که مدیریت به تأثیر واحد کاری بر عملکرد اعتقاد دارد پس باید نسبت کارمندان هر واحد به کل کارمندان سازمان در نمونهٔ ۸۰ تایی رعایت شود. حاصل عملیات نمونه‌گیری گروهی برای تعیین عناصر نمونهٔ هر گروه در جدول ۱ـ۹ آمده است:

---

1. stratified sampling

جدول ۱ـ۹ جدول تعیین نمونه‌های مورد نیاز در هر واحد

نماد	واحدمالی	واحد اداری	واحد تولید	واحد خدمات	جمع
N_k (تعداد افراد در هر گروه جامعه)	۱۸۰	۲۲۸	۱۳۳	۵۹	N = ۶۰۰
$p_k=\frac{N_k}{N}$ (نسبت افراد در هر گروه جامعه)	٪۳۰	٪۳۸	٪۲۲	٪۱۰	٪۱۰۰
$n_k = p_k \times n$ (تعداد افراد نمونه در هر گروه)	۲۴	۳۰	۱۸	۸	n = ۸۰

چنانکه مشخص است، براساس سطر آخر جدول ۱ـ۹ باید از واحد مالی ۲۴ نفر، اداری ۳۰ نفر، تولید ۱۸ نفر و خدمات ۸ نفر را به عنوان نمونه انتخاب کرد.

٤. نمونه گیری خوشه‌ای

هرگاه جامعه مورد بررسی خیلی وسیع و گسترده باشد، انتخاب نمونه از نظر اجرایی مشکل به نظر می‌رسد؛ برای مثال فرض کنید، می‌خواهیم میزان تحصیلات کارمندان یک شهر بزرگ را بررسی کنیم. انتخاب نمونه با استفاده از روشهای مذکور دشوار و نیازمند دقت و هزینه زیاد است؛ اما با استفاده از نمونه گیری خوشه‌ای [1] می‌توان واحد نمونه گیری را «سازمان» تعریف کرد. ابتدا چند سازمان (خوشه) را به صورت نمونه گیری تصادفی ساده و یا سیستماتیک انتخاب کرده، سپس کارمندان مورد نیاز را از بین این سازمانها با استفاده از همین روش انتخاب می‌کنیم.

۵. نمونه گیری مرحله‌ای

نمونه گیری مرحله‌ای [2]، شکل گسترش یافتهٔ نمونه گیری خوشه‌ای است. در این روش عناصر نمونه اصلی طی چند مرحله انتخاب می‌شوند؛ یعنی انتخاب نمونه از نمونهٔ دیگر؛ مثلاً می‌توان در مثال مربوط به نمونه گیری خوشه‌ای، ابتدا چند سازمان را به طور تصادفی از شهر انتخاب و سپس از بین هر سازمان چند واحد سازمانی را معین کرد و پس از آن عناصر نمونه را از هر واحد به طور تصادفی انتخاب نمود.

1. cluster sampling   2. stage sampling

۳ـ۹ روش نمونه گیری تصادفی ساده با جایگذاری و بدون جایگذاری

اگر در یک جامعهٔ آماری با N عضو، یک نمونه تصادفی به حجم n انتخاب شود، چنانچه هریک از عناصر نمونه پس از انتخاب و یادداشت صفت مورد نظر مجدداً به جامعه برگردد و دوباره نمونه بعدی انتخاب شود، این رویه اگر تا انتخاب n امین عضو نمونه ادامه داشته باشد به نمونه گیری تصادفی ساده «باجایگذاری» معروف است. واضح است که در این روش احتمال انتخاب هریک از عناصر نمونه از جامعهٔ آماری مساوی $\frac{1}{N}$ می‌باشد.

حال چنانچه عناصر نمونه، پس از انتخاب، دیگر به جامعه برنگردند و این رویه تا انتخاب n امین عضو نمونه ادامه داشته باشد، آن را نمونه گیری تصادفی ساده «بدون جایگذاری» می‌گویند. واضح است که احتمال انتخاب اولین عضو نمونه $\frac{1}{N}$ ، دومین عضو نمونه $\frac{1}{N-1}$ و سرانجام n امین عضو نمونه $\frac{1}{N-n+1}$ می‌باشد. طبیعی است در نمونه گیری با جایگذاری امکان انتخاب یک فرد برای چندین مرتبه وجود دارد، اما در نمونه گیری بدون جایگذاری امکان تکرار یک عضو از جامعه هرگز وجود ندارد.

احتمالاً در نظر اول، نمونه گیری با جایگذاری به هیچ وجه معقول به نظر نمی‌آید، چرا باید به یک عضو جامعه که قبلاً در نمونه بوده است شانس اضافی داده شود؟ از نظر جمع‌آوری اطلاعات این عمل در واقع دوباره کاری محض است و همان طوری که مشخص است در نمونه گیری با جایگذاری دقت هم کمتر می‌شود. با این حال نمونه گیری با جایگذاری به دو دلیل مهم است: اگر در جریان نمونه‌برداری خیال ما از بابت دوباره کاری راحت باشد، زحمات ما خیلی کمتر می‌شود (بخصوص این امر در نمونه‌های بزرگ صادق است)؛ ولی دلیل اصلی این است که همین اندک تغییری که در روش خود می‌دهیم، باعث خواهد شد که نمونه گیری و محاسبات آن آسانتر شود و بدین وسیله امکان بررسی روشهای پیچیده‌تر نمونه گیری نیز میسر می‌شود. خلاصه آنکه اگر یک روش در حالت «طبیعی» به محاسبات پیچیده‌ای نیاز داشته باشد و ما بتوانیم با یک تغییر جزئی از آن اجتناب کنیم، این تغییر انجام خواهد گرفت.

به طور کلی، اگر نمونه گیری با جایگذاری انجام پذیرد مشاهدات تصادفی X_1 ، X_2 ، ... ، X_n مستقل خواهند بود. در جامعه‌های بزرگ حتی اگر نمونه گیری بدون جایگذاری انجام گیرد، در عمل شبیه نمونه گیری با جایگذاری است؛ به طوری که باز

هم اساساً استقلال برقرار است. نمونه گیری از جامعه‌های بزرگ را «نمونه گیری از جامعه نامحدود» گویند که براساس این قاعده تعریف می‌شود:

$$\frac{n}{N} \leq \%5 \qquad (۹\text{-}۱)$$

چنانچه رابطهٔ ۱ـ۹ برقرار نباشد، حجم نمونه نسبت به جامعه آنقدر بزرگ است که می‌توانیم آن را «نمونه گیری از جامعه محدود» بنامیم.

در نمونه گیری از جامعه کوچک ـ با فرض بدون جایگذاری ـ مشاهدات را نمی‌توان مستقل از هم فرض کرد. در تمامی بحثهای کاربردی این کتاب تعریف ما از نمونه همان نمونه تصادفی ساده با جایگذاری (نمونه گیری از جامعه نامحدود) است که تعریف ریاضی آن چنین می‌شود:

نمونهٔ تصادفی ساده شامل n متغیر تصادفی X_1، X_2، ...، X_n، مستقل از همدیگر است که هریک از آنها توزیعی همانند توزیع جامعهٔ آماری دارند.

تمرین

۱. تفاوت نمونه گیری گروهی با نمونه گیری خوشه‌ای را ذکر کنید.

۲. توضیح دهید در چه صورتی می‌توان نمونه گیری بدون جایگذاری را همانند نمونه گیری با جایگذاری تلقی کرد؟

۳. صدا و سیما در نظر دارد براساس یک نمونه گیری تصادفی، متوسط زمانی را که ساکنان منطقه بخصوصی روزانه صرف تماشای تلویزیون می‌کنند، برآورد کند. با توجه به سرشماری اخیر مشخص شده است که ۱ میلیون نفر در این منطقه ساکنند. از این تعداد ۳۰۰ هزار نفر مرد، ۳۲۵ هزار نفر زن و مابقی کودک هستند. با بودجه‌ای که صدا و سیما به این امر اختصاص داده است می‌توان نمونه‌ای مرکب از ۱۰ هزار نفر را انتخاب کرد. مطالعات مشابهی که در سایر مناطق انجام شده است نشان می‌دهد متوسط زمانی که مردان و زنان و کودکان صرف تماشای تلویزیون می‌کنند کاملاً با یکدیگر متفاوت است.

الف) به نظر شما در این نمونه ۱۰ هزار نفری چه تعداد مرد و زن و کودک باید وجود داشته باشند؟

ب) اگر بین متوسط زمانی که مردان، زنان و کودکان صرف تماشای تلویزیون می‌کنند اختلافی وجود نداشته باشد، پیشنهادی که در بند الف کرده‌اید باز هم مورد دارد؟ چرا؟

ج) چه روش نمونه گیری را برای بند ب پیشنهاد می‌کنید و به چه دلایلی؟

۹ـ٤ توزیعهای نمونه گیری

برای استنباط هر پارامتر جامعه باید از یک آماره[1] استفاده کرد؛ بنابراین متناظر با هر پارامتری یک آماره وجود دارد که خود یک متغیر تصادفی است. چنانکه گفته شد هر آماره‌ای دارای یک توزیع نمونه گیری (تابع احتمال) است. تابع احتمال یک آماره، تابعی است که براساس نمونه‌های تصادفی nتایی که به طور مکرر از جامعهٔ آماری انتخاب شده‌اند به دست می‌آید. این تابع را «توزیع نمونه گیری آماره» گویند.

توزیع نمونه گیری یک آماره به جامعه‌ای بستگی دارد که نمونه از آن حاصل شده و ممکن است به طور ریاضی و یا تقریب تجربی استنباط گردد. زمانی که توزیع نمونه گیری، به طور تجربی تقریب زده می‌شود، چنانچه اندازه نمونه[2] n تایی بزرگ باشد، آماره محاسبه‌شده از نمونه‌های مکرر که به صورت بافت‌نگار فراوانی نسبی ترسیم می‌شود، ممکن است تقریب بسیار خوبی برای توزیع نمونه گیری واقعی باشد.

هرگونه استنباط از آماره به توزیع آن بستگی دارد. توزیع آماره نشان‌دهنده رفتار آن در نمونه گیریهای مکرر است. توزیع نمونه گیری مشخص می‌کند که آیا آمارهٔ مورد استفاده تناسب لازم را با پارامتر مورد نظر دارد یا خیر؟ آیا آماره‌ای بهتر از آن وجود ندارد؟

سعی خواهیم کرد با تشریح یک مثال ساده پاسخ مناسبی برای سؤالات فوق فراهم آوریم. یکی از روشهای نمونه گیری، نمونه گیری تصادفی ساده است. در این روش، شانس انتخاب هریک از عناصر جامعهٔ آماری در نمونهٔ n تایی یکسان است. برای انتخاب یک نمونهٔ n تایی از یک جامعهٔ N عضوی، $\binom{N}{n}$ نمونهٔ ممکن وجود دارد. با این توصیف شانس انتخاب هریک از نمونه‌های n تایی عبارت از $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ خواهد بود.

مثال ۲ـ۹ فرض کنید یک جامعهٔ آماری ۵ عضوی با مقادیر ٦، ۹، ۱۲، ۱۵ و ۱۸ وجود دارد. جامعه دارای ۵ عضو مجزاست که احتمال رخداد هریک از آنها $\frac{1}{5}$ خواهد بود؛ بنابراین:

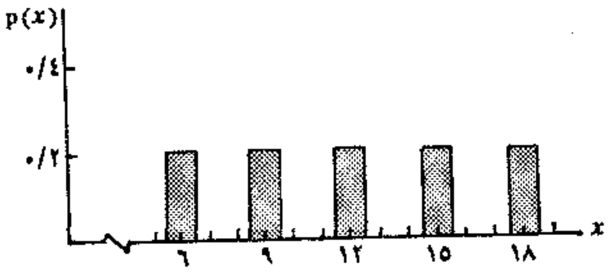
$$f(x) = ٠/٢٠ \quad , \quad x = ٦ , ٩ , ١٢ , ١٥ , ١٨$$

تابع احتمال فوق در شکل ۱ـ۹ به صورت بافت‌نگار رسم شده است. از

1. statistic
2. sample size

آنجایی‌که هریک از مقادیر جامعه دارای احتمال یکسان $\frac{1}{N}$ است. پس میانگین جامعه عبارت است از:

$$\mu_x = \frac{\Sigma x_i}{N} = \frac{60}{5} = 12$$



شکل ۱ـ۹ تابع احتمال برای یک جامعه با ۵ مشاهده

همچنین واریانس جامعه برابر است با:

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma (x_i - \mu_x)^2}{N} = \frac{90}{5} = 18$$

بعلاوه میانه جامعه (Md) مساوی ۱۲ است که با میانگین جامعه برابر می‌باشد.

با انتخاب یک نمونهٔ تصادفی ۳ تایی از جامعهٔ فوق، تعداد نمونه‌های ۳ تایی ممکن عبارت است از:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

هریک از ۱۰ نمونهٔ ممکن در جدول ۲ـ۹ آمده است. میانگین، میانه و واریانس هریک از نمونه‌های ۳تایی محاسبه‌شده که در جدول مشخص است. دراین جدول $\bar{X}$ آماره μ_x، md آمارهٔ میانه جامعه و S_x^2 آماره σ_x^2 می‌باشد. حال به تعریف ریاضی هریک از این آماره‌ها می‌پردازیم:

$\bar{X}$ که آماره میانگین واقعی جامعه است، از حاصل تقسیم مجموع عناصر نمونه بر تعداد عناصر نمونه به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x_i}{n} \qquad (۹\text{ـ}۲)$$

md بیان کنندهٔ ارزش عددی وسط عناصر مرتب‌شدهٔ نمونه است که آماره Md محسوب می‌شود.

جدول ۲ـ۹ مقادیر $\bar{X}$ ، md و S_x^2 یک نمونهٔ تصادفی ۳ تایی در یک جامعهٔ ۵ تایی

نمونه	مقادیر نمونه	$\bar{X}$	md	S_x^2
۱	۶, ۹, ۱۲	۹	۹	۹
۲	۶, ۹, ۱۵	۱۰	۹	۲۱
۳	۶, ۹, ۱۸	۱۱	۹	۳۹
۴	۶, ۱۲, ۱۵	۱۱	۱۲	۲۱
۵	۶, ۱۲, ۱۸	۱۲	۱۲	۳۶
۶	۶, ۱۵, ۱۸	۱۳	۱۵	۳۹
۷	۹, ۱۲, ۱۵	۱۲	۱۲	۹
۸	۹, ۱۲, ۱۸	۱۳	۱۲	۲۱
۹	۹, ۱۵, ۱۸	۱۴	۱۵	۲۱
۱۰	۱۲, ۱۵, ۱۸	۱۵	۱۵	۹

واریانس نمونه، S_x^2 ، نیز از مجموع مجذور انحرافات حول $\bar{X}$ تقسیم بر $n - 1$ به دست می‌آید؛ یعنی:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n-1} \qquad (۹\text{ـ}۳)$$

از آنجا که احتمال رخداد هریک از نمونه‌های سه تایی در جدول ۲ـ۹، $\frac{1}{10}$ است، پس احتمال رخداد هریک از عناصر آماره‌ها ($\bar{X}$ ، md و S_x^2) نیز مساوی $\frac{1}{10}$ خواهد بود. بدین روال، توزیعهای نمونه گیری محاسبه شدهٔ میانگین نمونه در قسمت «الف» جدول ۳ـ۹ و میانهٔ نمونه در قسمت «ب» جدول مذکور نشان داده شده است. توجه داشته باشید که هفت مقدار متفاوت برای $\bar{X}$ و فقط سه مقدار متفاوت برای میانهٔ نمونه (md) وجود دارد.

جدول ۹ـ۳ توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ و md به دست آمده از جدول ۲ـ۹

الف) میانگین نمونه		ب) میانهٔ نمونه	
$f(\bar{X})$	$\bar{X}$	f(md)	md
۰/۱۰	۹	۰/۳۰	۹
۰/۱۰	۱۰	۰/٤۰	۱۲
۰/۲۰	۱۱	۰/۳۰	۱۵
۰/۲۰	۱۲		
۰/۲۰	۱۳		
۰/۱۰	۱٤		
۰/۱۰	۱۵		

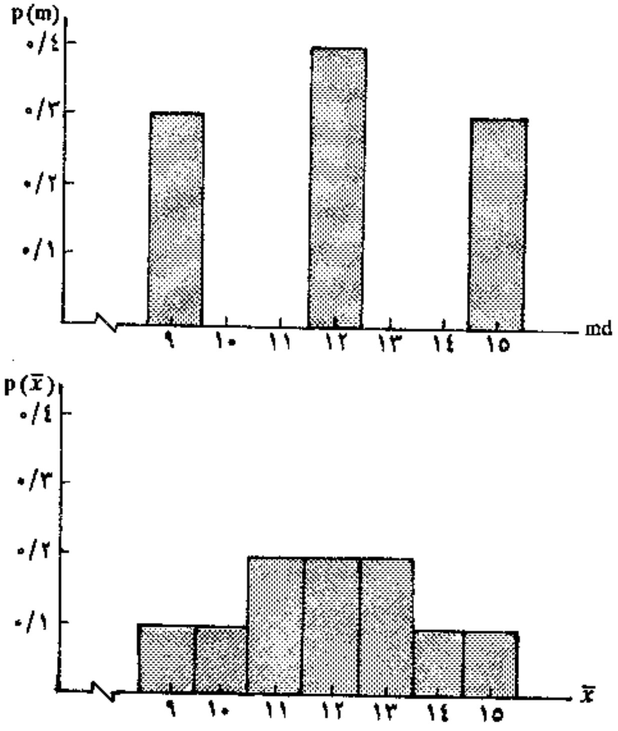
حال فرض کنید که به انتخاب یکی از آماره‌های $\bar{X}$ و md برای تخمین پارامتر $Md = \mu_x = ۱۲$ علاقه‌مند هستیم. کدام یک از آنها باید انتخاب شود؟ بافت‌نگارهای احتمال برای میانه و میانگین نمونه براساس جدول ۳ـ۹ در شکل ۲ـ۹ آمده است. یکی از روشهای ساده مقایسهٔ $\bar{X}$ و md به عنوان برآوردکننده‌های ممکن $\mu_x = ۱۲$، نشان‌دهندهٔ این نکته است که دو میانه، دارای دو خطای ‎−۳ = (۱۲ − ۹)‎ و ‎۳ = (۱۲ − ۱۵)‎ هستیم که هرکدام از آنها دارای احتمال ۳۰ درصد است. به عبارت دیگر کوچکترین خطا، خطای ۳ واحدی با احتمال ٦۰ درصد است که بسیار بزرگ است. حال آنکه در $\bar{X}$ احتمال خطای ۳ و بیشتر فقط ۰/۲۰ است. با این قاعده برای تخمین μ_x آمارهٔ $\bar{X}$ به md اولویت پیدا می‌کند.

از آنجایی که توزیعهای نمونه‌گیری مورد بحث، توابع احتمال حقیقی هستند، پس با استفاده از آنها به محاسبهٔ میانگین و واریانس می‌پردازیم. براساس داده‌های جدول ۳ـ۹ میانگین $\bar{X}$ که با $\mu_{\bar{x}}$ بیان می‌شود، عبارت است از:

$$\mu_{\bar{x}} = \Sigma \bar{X}_i f(\bar{X}_i) \quad (۹\text{ـ}٤)$$

$$= ۹\,(۰/۱۰) + ۱۰\,(۰/۱۰) + \ldots + ۱۵\,(۰/۱۰) = ۱۲$$

میانگین $\bar{X}$ با میانگین واقعی جامعه؛ μ_x، کاملاً مساوی است. این مهم یک امر اتفاقی نیست بلکه در هر نمونه‌گیری تصادفی تساوی $\mu_{\bar{x}}$ و μ_x برقرار است. پس می‌توان پذیرفت که:



شکل ۲ـ۹ تابع احتمال برای توزیعهای نمونه‌گیری $\bar{X}$ و md نمونه

میانگین $\bar{X}$ یک نمونه تصادفی n تایی با میانگین واقعی جامعه مساوی است؛ یعنی:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x$$

واریانس $\bar{X}$ که با $\sigma_{\bar{x}}^{2}$ نشان داده می‌شود با استفاده از این فرمول محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{\bar{x}}^{2} = E(\bar{X}^{2}) - \mu_{\bar{x}}^{2} \qquad (۹ـ۵)$$

یا:

$$\sigma_{\bar{x}}^{2} = \Sigma \bar{X}_i^{2} f(\bar{X}_i) - \mu_{\bar{x}}^{2}$$

$$= [۹^{۲}(۰/۱۰) + ۱۰^{۲}(۰/۱۰) + ... + ۱۵^{۲}(۰/۱۰)] - (۱۲)^{۲}$$

$$= ۱٤۷ - ۱٤٤ = ۳$$

حال به منظور مقایسهٔ $\bar{X}$ و md ، میانگین و واریانس توزیع md در جدول ۳ـ۹ محاسبه می‌شود:

$$\mu_{md} = \Sigma\, md\, f(md) \tag{۹ـ۶}$$

$$= ۹\,(۰/۳۰) + ۱۲\,(۰/۴۰) + ۱۵\,(۰/۳۰) = ۱۲$$

و واریانس md مساوی است با:

$$\sigma^{۲}_{md} = \Sigma\, md^{۲} f\,(md) - \mu^{۲}_{md} \tag{۹ـ۷}$$

$$= [\,۹^{۲}(۰/۳۰) + ۱۲^{۲}(۰/۴۰) + ۱۵^{۲}(۰/۳۰)\,] - (۱۲)^{۲} = ۵/۴$$

بنابراین مشخص است که $\mu_{\bar{x}}$ و μ_{md} هر دو مساوی ۱۲ هستند. براساس میانگین، هر دو تخمین‌زننده برای استنباط میانگین جامعه مناسب به نظرمی‌رسند. در حالی‌که $\sigma^{۲}_{\bar{x}} = ۳$ کوچکتر از $\sigma^{۲}_{md} = ۵/۴$ است. با این توصیف چون پراکندگی توزیع $\bar{X}$ کمتر از پراکندگی توزیع md است، پس آمارهٔ $\bar{X}$ دارای ویژگی مطلوبتری نسبت به md می‌باشد.

آیا $S^{۲}_{x}$ دارای خواص مطلوب به عنوان یک تخمین‌زننده $\sigma^{۲}_{x}$ است؟ بهتر است رجوع کنیم به جدول ۴ـ۹ که از داده‌های جدول ۲ـ۹ حاصل شده و نشان‌دهنده توزیع نمونه گیری $S^{۲}_{x}$ است. میانگین $S^{۲}_{x}$ عبارت است از:

$$E(S^{۲}_{x}) = \Sigma S^{۲}_{x} f(S^{۲}_{x}) \tag{۹ـ۸}$$

$$= ۹\,(۰/۳۰) + ۲۱\,(۰/۴۰) + ۳۶\,(۰/۱۰) + ۳۹\,(۰/۲۰) = ۲۲/۵$$

$E\,(S^{۲}_{x})$ قدری بیشتر از واریانس جامعه، $\sigma^{۲}_{x} = ۱۸$ ، می‌باشد. این اختلاف ناشی از نمونه گیری از جامعهٔ محدود است که باید با ضریب $(\frac{N}{N-۱})$ اصلاح شود؛ پس:

$$E\,(S^{۲}_{x}) = (\frac{N}{N-۱})\,\sigma^{۲}_{x} \tag{۹ـ۹}$$

$$۲۲/۵ = (\frac{۵}{۵-۱})\,(۱۸)$$

بدیهی است هرگاه اندازه جامعهٔ آماری، بزرگ یا نامحدود ($\frac{n}{N} \leq$ ٪۵) شود، مقدار $\frac{N}{N-1}$ به سمت یک میل می‌کند و در نتیجه $E(S_x^2) = \sigma_x^2$ خواهد شد.

جدول ۹.۴ توزیع نمونه‌گیری S_x^2 به دست‌آمده از جدول ۹.۲

S_x^2	$f(S_x^2)$
۹	۰/۳۰
۲۱	۰/۴۰
۳۶	۰/۱۰
۳۹	۰/۲۰

زمانی که N خیلی بزرگ نیست، توزیعهای نمونه‌گیری به طور مستقیم استخراج و ترسیم می‌شوند. عموماً، توزیع نمونه‌گیری به طریق ریاضی استنتاج می‌شود. انتخاب نمونه‌های مکرر n تایی از جامعه آماری و رسم بافت‌نگار فراوانی نسبی، تقریب خوبی برای توزیع نمونه‌گیری و رفتار آماره مورد نظر است. در بخشهای بعدی چندین قضیهٔ مهم را معرفی خواهیم کرد. این قضایا به آمارگر اجازه خواهد داد که توزیع نمونه‌گیری آماره‌ها را براحتی تقریب بزنند. بدیهی است در معرفی این قضایا اساس آماره‌ها بر نمونه‌گیری از جامعهٔ نامحدود استوار است.

۹ـ۵ خواص مطلوب آماره‌ها

چنانکه در بخش قبلی بیان شد برای هر پارامتر، تخمین‌زننده‌های مختلفی وجود دارد که باید بهترین آنها برای استنباط پارامتر انتخاب شود؛ برای مثال برای μ_x دو برآوردکننده $\bar{X}$ و md وجود داشت که میانگین هر دو آنها با μ_x مساوی بود. ولی آنچه $\bar{X}$ را بر md ارجح کرد، پراکندگی کمتر آن بود. حال برای تعمیم مطلب، پارامتر دلخواهی از جامعه، مثلاً θ را در نظر می‌گیریم و برآوردکننده (آمارهٔ) آن را با $\hat{\theta}$ نشان می‌دهیم و به ذکر خواص مطلوب آماره‌ها می‌پردازیم.

الف) نااریب (بدون تورش)[1]

اگر میانگین $\hat{\theta}$، چنانکه در شکل ۹ـ۳ «الف» نشان داده شده است، به طور دقیق بر θ (پارامتر واقعی) منطبق باشد، $\hat{\theta}$ برآوردکننده‌ای نااریب خوانده می‌شود. حال تعریف را به طور رسمی بیان می‌کنیم:

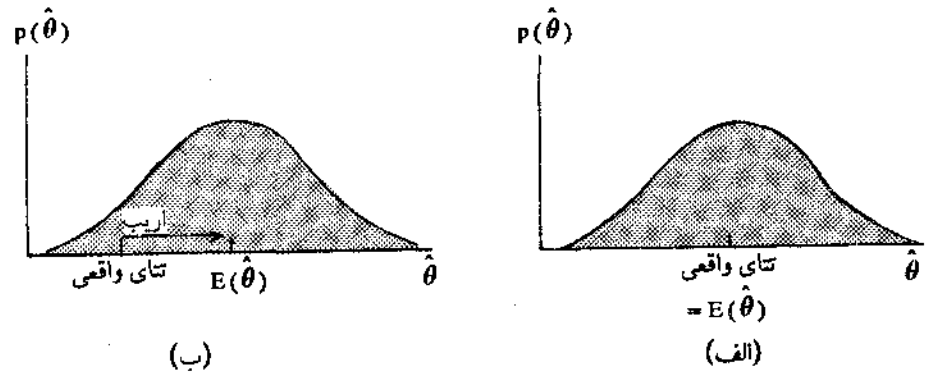
1. unbiasedness

$\hat{\theta}$ برآوردکنندهٔ نااریب θ است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \qquad (۹\text{-}۱۰)$$

البته، برآوردکنندهٔ $\hat{\theta}$ اریب نامیده می‌شود اگر $E(\hat{\theta})$ با θ متفاوت باشد. در واقع، اریب به عنوان این تفاوت تعریف می‌شود:

$$\text{اریب} = E(\hat{\theta}) - \theta \qquad (۹\text{-}۱۱)$$



شکل ۹.۳ مقایسهٔ الف) برآوردکنندهٔ نااریب و ب) برآوردکنندهٔ اریب

اریب در شکل ۳ـ۹ «ب» نشان داده شده است. توزیع $\hat{\theta}$ «دور از هدف» است؛ چون $E(\hat{\theta})$ از θ بزرگتر است، $\hat{\theta}$ گرایش به این دارد که θ را زیادتر برآورد کند؛ برای مثال از برآوردکنندهٔ اریب، میانگین توان دوم انحراف نمونه را در نظر بگیرید:

$$\text{میانگین توان دوم انحراف نمونه} = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{X})^2 \qquad (۹\text{-}۱۲)$$

این برآورد کننده، به طور متوسط، واریانس جامعه (σ_x^2) را کمتر از واقع برآورد خواهد کرد؛ اما اگر به جای n در مخرج از $n-1$ استفاده کنیم، رابطهٔ ۳ـ۹ به دست می‌آید که برآوردکنندهٔ نااریب برای σ_x^2 است.

در یک جامعهٔ نرمال، میانگین نمونه و میانهٔ نمونه هر دو برآوردکننده‌های نااریب μ_x هستند. پس، هنگام قضاوت دربارهٔ اینکه کدام یک مرجح است، باید ویژگیهای دیگرشان را بررسی کرد.

ب) حداقل واریانس[1]: کارآیی برآوردکننده‌های ناریب

همچنان که مایلیم میانگین $\hat{\theta}$ بر θ منطبق باشد، علاقه‌مندیم که توزیع برآوردکنندهٔ $\hat{\theta}$ بشدت متمرکز باشد؛ یعنی واریانس کوچکی داشته باشد. این مفهوم کارآیی در شکل ۴-۹ نشان داده شده است. $\hat{\theta}_1$ را برآوردکننده‌ای کارآتر می‌نامیم، زیرا دارای واریانس کوچکتری است. کارآیی نسبی دو تخمین‌زننده به طور رسمی به این صورت تعریف می‌شود:

اگر $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ دوبرآوردکنندهٔ ناریب باشند.

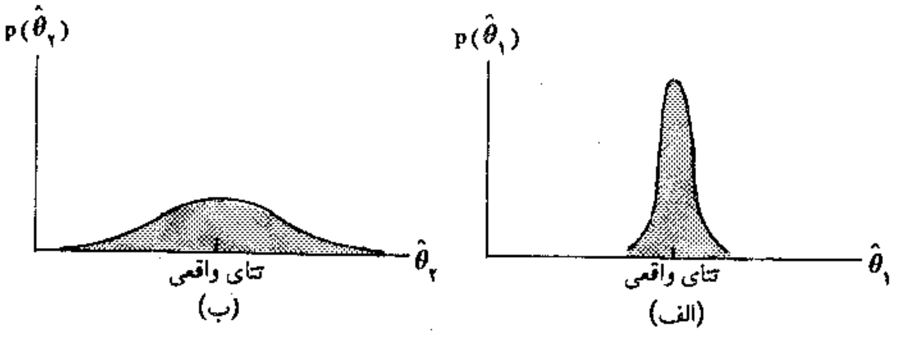
$$\text{کارآیی نسبی } \hat{\theta}_1 \text{ در مقایسه با } \hat{\theta}_2 = \frac{\sigma^2_{\hat{\theta}_2}}{\sigma^2_{\hat{\theta}_1}} \qquad (۹\text{-}۱۳)$$

برآوردکننده‌ای که کارآتر از هر برآوردکنندهٔ دیگر است به طور مطلق کارآ یا فقط کارآ نامیده می‌شود.

با این شاخص، می‌توان علت ترجیح $\bar{X}$ را بر md در بخش قبلی، بالابودن کارآیی دانست. کارآیی $\bar{X}$ نسبت به توزیع نمونه گیری md بالاتر است چون:

$$\text{کارآیی نسبی } \bar{X} \text{ به md} = \frac{\sigma^2_{md}}{\sigma^2_{\bar{X}}} \text{ یعنی } \frac{۵/۴}{۳} = ۱/۸$$

پس $\bar{X}$، ۱/۸ برابر از md کارآتر است.



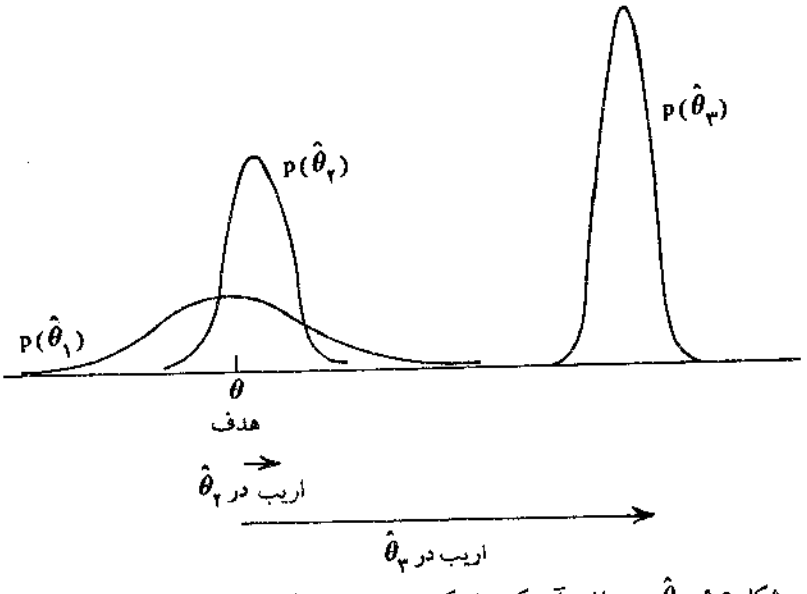
شکل ۴-۹ مقایسهٔ الف) برآوردکنندهٔ کارآ و ب) برآوردکنندهٔ غیرکارآ (هر دو ناریب هستند).

1. minimal variance

ج) حداقل میانگین مجذور خطا (MSE)[1]

تا کنون بحث شد که هنگام مقایسهٔ برآوردکننده‌های نااریب، آن را که دارای کمترین واریانس است انتخاب می‌کنیم. اما فرض کنید بخواهیم همان‌طور که در شکل ۵ـ۹ دیده می‌شود، یک برآوردکننده اریب را با یک برآوردکنندهٔ نااریب مقایسه کنیم: اینک دیگر لزوماً برآوردکننده‌ای که دارای کمترین واریانس است، برآوردکنندهٔ مناسب نیست؛ $\hat{\theta}_3$ واجد این امتیاز هست امّا رضایتبخش نیست، چون به مقدار خیلی زیادی اریب است. همچنین لزوماً برآوردکننده‌ای که دارای کمترین اریب است، انتخاب نمی‌شود، $\hat{\theta}_1$ دارای اریب صفر است، اما به دلیل واریانس زیادش رضایتبخش به نظر نمی‌رسد. برآوردکننده‌ای که به نظر می‌رسد روی هم رفته بهترین عملکرد را دارد $\hat{\theta}_2$ است، زیرا دارای بهترین ترکیب از اریب کوچک و واریانس کوچک است.

از این استدلال شهودی چنین برمی‌آید که باید ملاکی استفاده شود که هم اریب و هم واریانس را به طرز مناسبی در نظر گیرد. به دیگر سخن، می‌توان گفت ما تنها به واریانس یک برآوردکننده علاقه‌مند نیستیم، زیرا این شاخص فقط نحوهٔ پراکندگی



شکل ۵ـ۹ $\hat{\theta}_2$ به عنوان برآوردکننده‌ای که دارای بهترین ترکیب از اریب و واریانس است.

1. mean square error

برآوردکننده را حول میانگین آن نشان می‌دهد، بلکه به شاخص مشابهی برای نحوهٔ پراکندگی برآوردکننده در اطراف هدف واقعی (θ) نیز علاقه‌مندیم. معمولترین شاخص از این نوع عبارت است از:

$$\text{MSE} = \text{E}(\hat{\theta} - \theta)^{2} \qquad (۹\text{-}۱۴)$$

رابطهٔ ۹ـ۱۴ ملاکی است که هم واریانس و هم اریب را اندازه‌گیری می‌کند. به عبارت دیگر ثابت می‌کند که:

$$\text{MSE} = \sigma_{\hat{\theta}}^{2} + (\text{اریب})^{2} \qquad (۹\text{-}۱۵)$$

بنابراین با استفاده از مفهوم MSE می‌توان مفهوم کارآیی نسبی را برای دو تخمین‌زننده به این صورت تعمیم داد:

برای هر دو برآوردکنندهٔ $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ ـ خواه اریب و خواه نااریب ـ داریم:

$$\text{کارآیی نسبی } \hat{\theta}_1 \text{ در مقایسه با } \hat{\theta}_2 = \frac{\text{MSE}(\hat{\theta}_2)}{\text{MSE}(\hat{\theta}_1)} \qquad (۹\text{-}۱۶)$$

رابطهٔ ۹ـ۱۳ حالت خاصی از رابطهٔ ۹ـ۱۶ است.

خلاصه آنکه، مفهوم کارآیی آنطور که در رابطهٔ ۹ـ۱۶ تعریف شد چون ترکیبی از دو خاصیت جالب اریب کم و واریانس کم را دربردارد، مهمترین ملاک برای قضاوت دربارهٔ برآورد کننده‌هاست.[1]

تمرین

۱. چرا شناخت توزیع نمونه‌گیری در آمار استنباطی اهمیت دارد؟
۲. تفاوت بین توزیع نمونه‌گیری و توزیع جامعه را ذکر کنید.
۳. عناصر یک جامعهٔ آماری عبارتند از: ٤، ۷، ۹ و ۱۲.

---

۱. علاوه بر خواص فوق در برخی متون از خاصیت سازگاری (consistency) نیز نام برده می‌شود. براساس این خاصیت، برآوردکنندهٔ سازگار، تخمین‌زننده‌ای است که وقتی حجم نمونه به طور نامتناهی افزایش یابد ($n \to \infty$)، بی‌کم و کاست بر روی پارامتر خود متمرکز می‌شود. از آنجا که مفهوم سازگاری با کمترین MSE یکی است، ما آن را به عنوان یک خاصیت مجزا ذکر نکرده‌ایم. نتیجه آنکه برآوردکنندهٔ $\hat{\theta}$ سازگار است اگر MSE آن به صفر میل کند. $\hat{\theta}$ برآوردکننده‌ای سازگار است اگر وقتی $n \to \infty$ میل کند، اریب و واریانس آن هر دو به صفر میل کنند.

الف) چه تعداد نمونهٔ دوتایی می‌توان از این جامعه بدون جایگذاری انتخاب کرد؟
ب) تابع احتمال $\bar{X}$ را نوشته و $E(\bar{X})$ و $\sigma^2_{\bar{x}}$ را محاسبه کنید.
ج) تابع احتمال md و S^2_x را نوشته و میانگین و واریانس هریک را محاسبه کنید.
د) کارآیی نسبی $\bar{X}$ را در مقایسه با md محاسبه کنید.
٤. آیا $\bar{X}$ برآوردکننده‌ای سازگار برای μ_x است؟ چرا؟

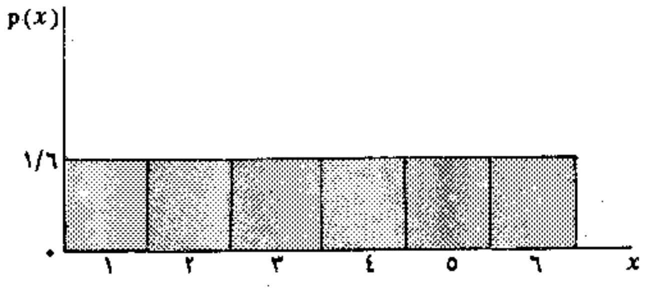
۹ـ۶ قضیهٔ حد مرکزی

براساس قضیهٔ حد مرکزی[1]، مجموع و میانگین مقادیر یک نمونهٔ تصادفی n تایی که از یک جامعهٔ آماری انتخاب می‌شوند، به طور تقریبی به یک توزیع نمونه‌گیری قرینه گرایش دارند. اهمیت این گزاره شاید با تشریح یک مثال بیشتر آشکار شود.

مثال ۹ـ۳ تابع احتمال مقادیر یک تاس از یک توزیع یکنواخت به صورت ذیل تبعیت می‌کند:

$$f(x)=\frac{۱}{۶} \quad , \quad x=۱,۲,۳,٤,۵,۶$$

شکل عمومی تابع فوق به این صورت است:



شکل ۹ـ۶ تابع احتمال برای X، اگر X اعداد ظاهر شده برای یک تاس باشد.

حال اگر پنج تاس به طور همزمان به عنوان نمونه (n = ۵) ریخته و مقادیر مشاهده‌شده یادداشت شود، توزیع آماره $\bar{X}$ در آن به سمت یک توزیع قرینه میل خواهد کرد. این مثال به طور عملی انجام گرفته و پنج تاس درصد نوبت ریخته شده است. حاصل مشاهدات در جدول ۹ـ۵ آمده است:

---

1. central limit theorem

جدول ۹.۵ نمونه‌گیری براساس ریختن پنج تاس (n= ۵)

شمارهٔ نمونه	مقادیر نمونه X_i	Σx_i	$\bar{X}$	شمارهٔ نمونه	مقادیر نمونه X_i	Σx_i	$\bar{X}$
۱	۳, ۵, ۱, ۳, ۲	۱۴	۲/۸	۵۱	۲, ۳, ۵, ۳, ۲	۱۵	۳/۰
۲	۳, ۱, ۱, ۴, ۶	۱۵	۳/۰	۵۲	۱, ۱, ۱, ۲, ۴	۹	۱/۸
۳	۱, ۳, ۱, ۶, ۱	۱۲	۲/۴	۵۳	۲, ۶, ۳, ۴, ۵	۲۰	۴/۰
۴	۴, ۵, ۳, ۳, ۲	۱۷	۳/۴	۵۴	۱, ۲, ۲, ۱, ۱	۷	۱/۴
۵	۳, ۱, ۳, ۵, ۲	۱۴	۲/۸	۵۵	۲, ۴, ۴, ۶, ۲	۱۸	۳/۶
۶	۲, ۴, ۴, ۲, ۴	۱۶	۳/۲	۵۶	۳, ۲, ۵, ۴, ۵	۱۹	۳/۸
۷	۴, ۲, ۵, ۵, ۳	۱۹	۳/۸	۵۷	۲, ۴, ۲, ۴, ۵	۱۷	۳/۴
۸	۳, ۵, ۵, ۵, ۵	۲۳	۴/۶	۵۸	۵, ۵, ۴, ۳, ۲	۱۹	۳/۸
۹	۶, ۵, ۵, ۱, ۶	۲۳	۴/۶	۵۹	۵, ۴, ۴, ۶, ۳	۲۲	۴/۴
۱۰	۵, ۱, ۶, ۱, ۶	۱۹	۳/۸	۶۰	۳, ۲, ۵, ۳, ۱	۱۴	۲/۸
۱۱	۱, ۱, ۱, ۵, ۳	۱۱	۲/۲	۶۱	۲, ۱, ۴, ۱, ۳	۱۱	۲/۲
۱۲	۳, ۴, ۲, ۴, ۴	۱۷	۳/۴	۶۲	۴, ۱, ۱, ۵, ۲	۱۳	۲/۶
۱۳	۲, ۶, ۱, ۵, ۴	۱۸	۳/۶	۶۳	۲, ۳, ۱, ۲, ۳	۱۱	۲/۲
۱۴	۶, ۳, ۴, ۲, ۵	۲۰	۴/۰	۶۴	۲, ۳, ۳, ۲, ۶	۱۶	۳/۲
۱۵	۲, ۶, ۲, ۱, ۵	۱۶	۳/۲	۶۵	۴, ۳, ۵, ۲, ۶	۲۰	۴/۰
۱۶	۱, ۵, ۱, ۲, ۵	۱۴	۲/۸	۶۶	۳, ۱, ۳, ۳, ۴	۱۴	۲/۸
۱۷	۳, ۵, ۱, ۱, ۲	۱۲	۲/۴	۶۷	۴, ۶, ۱, ۳, ۶	۲۰	۴/۰
۱۸	۳, ۲, ۴, ۳, ۵	۱۷	۳/۴	۶۸	۲, ۴, ۶, ۶, ۳	۲۱	۴/۲
۱۹	۵, ۱, ۶, ۳, ۱	۱۶	۳/۲	۶۹	۴, ۱, ۶, ۵, ۵	۲۱	۴/۲
۲۰	۱, ۶, ۴, ۴, ۱	۱۶	۳/۲	۷۰	۶, ۶, ۶, ۴, ۵	۲۷	۵/۴
۲۱	۶, ۴, ۲, ۳, ۵	۲۰	۴/۰	۷۱	۲, ۲, ۵, ۶, ۳	۱۸	۳/۶
۲۲	۱, ۳, ۵, ۴, ۱	۱۴	۲/۸	۷۲	۶, ۶, ۶, ۱, ۶	۲۵	۵/۰
۲۳	۲, ۶, ۵, ۲, ۶	۲۱	۴/۲	۷۳	۴, ۴, ۴, ۳, ۱	۱۶	۳/۲
۲۴	۳, ۵, ۱, ۳, ۵	۱۷	۳/۴	۷۴	۴, ۴, ۵, ۴, ۲	۱۹	۳/۸
۲۵	۵, ۲, ۴, ۴, ۳	۱۸	۳/۶	۷۵	۴, ۵, ۴, ۱, ۴	۱۸	۳/۶
۲۶	۶, ۱, ۱, ۱, ۶	۱۵	۳/۰	۷۶	۵, ۳, ۲, ۳, ۴	۱۷	۳/۴
۲۷	۱, ۴, ۱, ۲, ۶	۱۴	۲/۸	۷۷	۱, ۳, ۳, ۱, ۵	۱۳	۲/۶
۲۸	۳, ۱, ۲, ۱, ۵	۱۲	۲/۴	۷۸	۴, ۱, ۵, ۵, ۳	۱۸	۳/۶
۲۹	۱, ۵, ۵, ۴, ۵	۲۰	۴/۰	۷۹	۴, ۵, ۶, ۵, ۴	۲۴	۴/۸
۳۰	۴, ۵, ۳, ۵, ۲	۱۹	۳/۸	۸۰	۱, ۵, ۳, ۴, ۲	۱۵	۳/۰
۳۱	۴, ۱, ۶, ۱, ۱	۱۳	۲/۶	۸۱	۴, ۳, ۴, ۶, ۳	۲۰	۴/۰

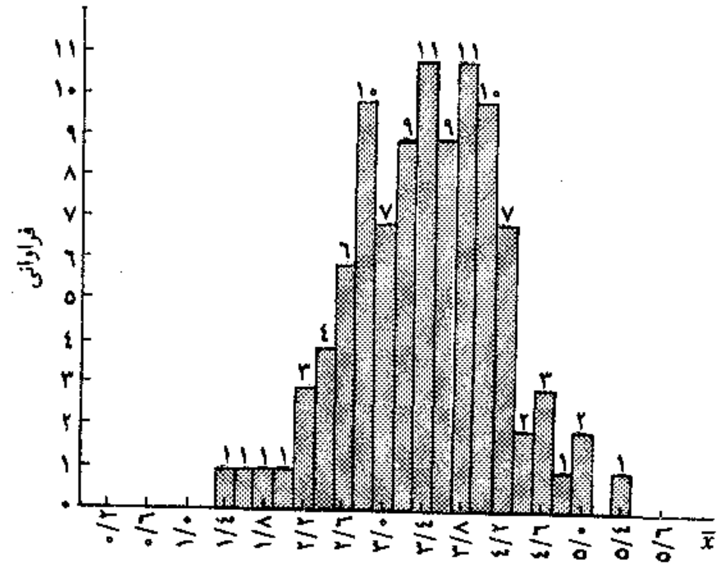
ادامه جدول ۵ـ۹

$\bar{X}$	Σx_i	مقادیر نمونه X_i	شمارهٔ نمونه	$\bar{X}$	Σx_i	مقادیر نمونه X_i	شمارهٔ نمونه
۳/۶	۱۸	۵, ۴, ۲, ۱, ۶	۸۲	۳/۲	۱۶	۳, ۶, ۴, ۱, ۲	۳۲
۲/۶	۱۳	۱, ۳, ۲, ۲, ۵	۸۳	۳/۴	۱۷	۳, ۵, ۵, ۲, ۲	۳۳
۴/۰	۲۰	۵, ۴, ۱, ۴, ۶	۸۴	۳/۲	۱۶	۱, ۱, ۵, ۶, ۳	۳۴
۳/۶	۱۸	۲, ۴, ۲, ۵, ۵	۸۵	۳/۴	۱۷	۲, ۶, ۱, ۶, ۲	۳۵
۳/۴	۱۷	۱, ۶, ۳, ۱, ۶	۸۶	۲/۶	۱۳	۲, ۴, ۳, ۱, ۳	۳۶
۲/۶	۱۳	۲, ۲, ۴, ۳, ۲	۸۷	۲/۸	۱۴	۱, ۵, ۱, ۵, ۲	۳۷
۴/۲	۲۱	۴, ۴, ۵, ۴, ۴	۸۸	۴/۶	۲۳	۶, ۶, ۵, ۳, ۳	۳۸
۳/۶	۱۸	۲, ۵, ۴, ۳, ۴	۸۹	۲/۸	۱۴	۳, ۳, ۵, ۲, ۱	۳۹
۳/۸	۱۹	۵, ۱, ۶, ۴, ۳	۹۰	۵/۰	۲۵	۲, ۶, ۶, ۶, ۵	۴۰
۴/۲	۲۱	۵, ۲, ۵, ۶, ۳	۹۱	۳/۸	۱۹	۵, ۵, ۲, ۳, ۴	۴۱
۲/۸	۱۴	۶, ۴, ۱, ۲, ۱	۹۲	۳/۸	۱۹	۶, ۴, ۱, ۶, ۲	۴۲
۳/۴	۱۷	۶, ۳, ۱, ۵, ۲	۹۳	۳/۰	۱۵	۲, ۵, ۳, ۱, ۴	۴۳
۳/۲	۱۶	۱, ۳, ۶, ۴, ۲	۹۴	۲/۴	۱۲	۴, ۲, ۳, ۲, ۱	۴۴
۳/۰	۱۵	۶, ۱, ۴, ۲, ۲	۹۵	۴/۲	۲۱	۴, ۴, ۵, ۴, ۴	۴۵
۱/۶	۸	۱, ۱, ۲, ۳, ۱	۹۶	۴/۶	۲۳	۵, ۴, ۵, ۵, ۴	۴۶
۴/۰	۲۰	۶, ۲, ۵, ۱, ۶	۹۷	۴/۲	۲۱	۶, ۶, ۶, ۲, ۱	۴۷
۲/۰	۱۰	۳, ۱, ۱, ۴, ۱	۹۸	۳/۴	۱۷	۲, ۱, ۵, ۵, ۴	۴۸
۳/۰	۱۵	۵, ۲, ۱, ۶, ۱	۹۹	۳/۸	۱۹	۶, ۴, ۳, ۱, ۵	۴۹
۳/۸	۱۹	۲, ۴, ۳, ۴, ۶	۱۰۰	۴/۰	۲۰	۴, ۴, ۴, ۴, ۴	۵۰

توجه شود که مقادیر مشاهده شده در اولین نمونهٔ ۵ تایی عبارتند از:

$$x = ۳, ۵, ۱, ۳, ۲$$

آزمایش صد بار تکرار شده و مقادیر ۵ تاس در هر صد نوبت یادداشت شده است. نتایج این آزمایش در جدول ۵ـ۹ آمده است. جدول ۵ـ۹ نشان‌دهندهٔ $\sum_{i=1}^{5} x_i$ و $\bar{X}$ هر نمونهٔ ۵ تایی است. یک بافت‌نگار فراوانی نسبی برای $\bar{X}$ (یا برای $\sum_{i=1}^{5} x_i$) ساخته‌می‌شود که حاصل این عمل در شکل ۷ـ۹ آمده است. حال یک قاعدهٔ دیگر بدون اینکه اثبات شود، حاصل شده است. اگر این آزمایش با ده تاس ($n = ۱۰$) انجام پذیرد، بخوبی مشاهده می‌شود که توزیع نمونه گیری به یک توزیع قرینه بسیار شبیه شده است.



شکل ۹ـ۷ بافت‌نگار میانگین نمونه برای آزمایش ریختن پنج تاس (n = ۵)

به هر حال این قاعده بیانگر همان قضیهٔ حد مرکزی است که در آمار با آمارهٔ $\bar{X}$ بیان می‌شود.

قضیهٔ حدمرکزی؛ اگریک نمونهٔ تصادفی n تایی از یک جامعهٔ غیرنرمال با میانگین، μ_x ، و انحراف معیار، σ_x ، معین انتخاب شود، وقتی n بزرگ باشد، توزیع نمونه گیری میانگین نمونه؛ $\bar{X}$ ، تقریباً به صورت نرمال توزیع خواهد شد و دارای این میانگین و انحراف معیار خواهد بود:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \qquad \text{و} \qquad \mu_{\bar{x}} = \mu_x$$

همچنان که حجم نمونه بزرگتر و بزرگتر می‌شود، تقریب بیشتر و بیشتر به نرمال نزدیک شده، دقیقتر خواهد شد.

قضیهٔ حد مرکزی با استفاده از مجموع مقادیر عناصر هر نمونهٔ n تایی، $\sum_{i=1}^{n} x_i$، نیز قابل بیان است. همچنان که n بزرگتر می‌شود، تمایل توزیع مجموع داده‌های نمونه به سمت نرمال بیشتر می‌شود به طوری که دارای میانگین $n\mu_x$ و $\sqrt{n}\sigma_x$ خواهد بود.

اهمیت قضیهٔ حد مرکزی در دو چیز است: اول آنکه این احساس عمومی را که بسیاری از متغیرهای تصادفی در حالت طبیعی خود دارای توزیعی همانند توزیع

نرمال هستند قوت می‌بخشد و دوم حیطه کاربرد آن در آمار استنباطی است. بسیاری از برآوردکننده‌ها که برای استنباط پارامترهای جامعهٔ آماری به کار می‌روند از نوع میانگین و یا مجموع مقادیر نمونه‌ها هستند. در قضیه حد مرکزی هرگاه مجموع و یا متوسط مورد استفاده بوده، اندازه نمونه به قدر کافی بزرگ باشد، انتظار می‌رود که تخمین‌زننده دارای یک توزیع نرمال (البته به طور تقریبی) در نمونه‌گیریهای مکرر باشد. براین اساس می‌توان از توزیع نرمال برای توصیف رفتار استنباط‌کننده استفاده کرد. این وجه از قضیهٔ حد مرکزی به وفور در مباحث بعدی برای استنباطهای آماری استفاده می‌شود.

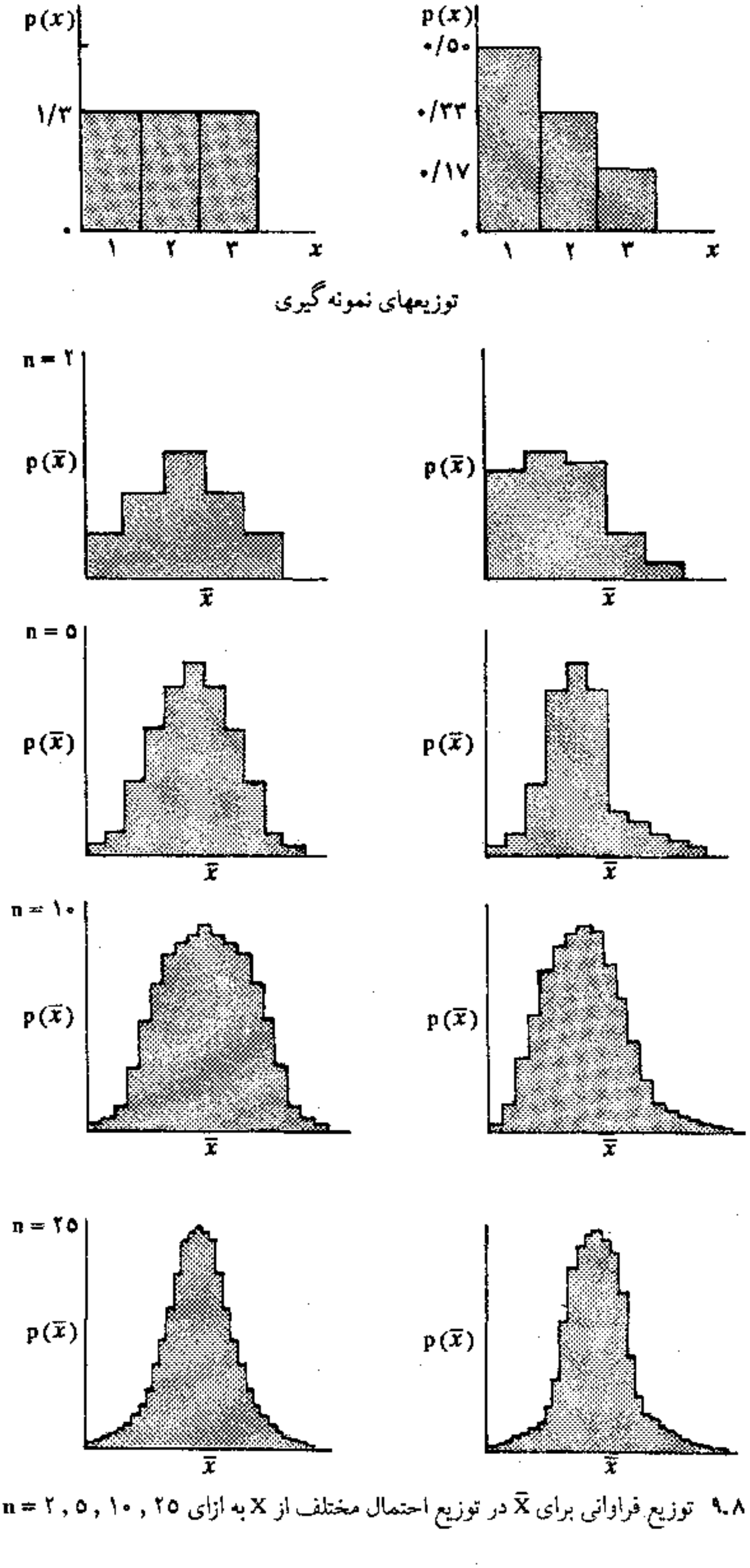
در شکل ۸ـ۹ توزیعهای $\bar{X}$ برای دو توزیع متفاوت از جامعه نشان داده شده است. شکل سمت چپ توزیعی یکنواخت و شکل سمت راست توزیعی نامتقارن[1] می‌باشد. در ردیفهای پایین‌تر توزیع نمونه‌گیری برای $\bar{X}$ از $n = ۲$ تا $n = ۲۵$ رسم شده است. شکل ۸ـ۹ دو ویژگی قابل توجه قضیهٔ حد مرکزی را بخوبی نشان می‌دهد. اول آنکه، قضیهٔ حد مرکزی صرف نظر از توزیع جامعه آماری مورد نمونه‌گیری همیشه برقرار است. چنانکه مشخص است علی‌رغم غیرنرمال بودن توزیعهای X، توزیعهای $\bar{X}$ برای هر دو توزیع با افزایش n به سمت توزیع نرمال میل می‌کنند. به طوری که در $n=۲۵$ توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ برای هر دو جامعهٔ آماری تقریباً نرمال است.

دوم آنکه، توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ برای مورد اول بشدت به توزیع نرمال نزدیک می‌شود، به طوری که در $n = ۱۰$ توزیع $\bar{X}$ تقریباً نرمال است. حال آنکه در نمونه‌های بزرگتر توزیع $\bar{X}$ برای مورد دوم به نرمال شبیه می‌شود. این نتیجه بیان‌کنندهٔ این حقیقت است که اگر داده‌ها به طور «متقارن»[2] حول میانگین، توزیع شده باشند، قضیهٔ حد مرکزی برای نمونه‌های کوچک بخوبی به کار خواهد رفت. در حالی که اگر توزیع جامعهٔ آماری دارای چولگی باشد، نمونه‌هایی بزرگتر لازم است تا یک تقریب کارآمد از توزیع $\bar{X}$ به وسیلهٔ توزیع نرمال حاصل شود.

بسیاری از نویسندگان براساس یک قاعده سرانگشتی[3] معتقدند که صرف نظر از توزیع جامعهٔ آماری حداقل یک نمونهٔ ۳۰ تایی لازم است تا بتوان گفت توزیع آمارهٔ $\bar{X}$ نرمال است.

---

1. non symmetric
2. symmetric
3. rule of thumb



شکل ۹.۸ توزیع فراوانی برای $\bar{X}$ در توزیع احتمال مختلف از X به ازای ۲۵ , ۱۰ , ۵ , ۲ = n

مثال ۹ـ۴ توزیع نمره‌های ارزشیابی کارمندان یک سازمان نرمال است. متوسط نمره‌های ارزشیابی ۱۵ و انحراف معیار آنها ۳ است. احتمال اینکه نمره یکی از کارمندان حداقل ۱۸ باشد، چقدر است؟

از آنجا که توزیع X نرمال است پس می‌توان از تعریف متغیر استاندارد Z استفاده کرد و احتمال مورد نظر را به دست آورد.

$$P(X \geq ۱۸) = P(Z \geq \frac{۱۸-۱۵}{۳})$$

$$= P(Z \geq ۱) = ۱ - ۰/۸۴۱۳ = \%۱۵۸۷$$

مثال ۹ـ۵ فرض کنید از جامعهٔ آماری مثال ۹ـ۴ یک نمونهٔ تصادفی ۹ نفره انتخاب شده است. احتمال اینکه میانگین نمرهٔ ارزشیابی آنها حداقل ۱۸ باشد، چقدر است؟

چون از یک توزیع نرمال با σ_x مشخص نمونه‌گیری شده است، پس توزیع $\bar{X}$ حتماً کشیده‌تر از توزیع جامعه است؛ بنابراین می‌توان متغیر تصادفی $\bar{X}$ را با استفاده از این رابطه استاندارد کرد:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}$$

می‌دانیم که:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x$$

و:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

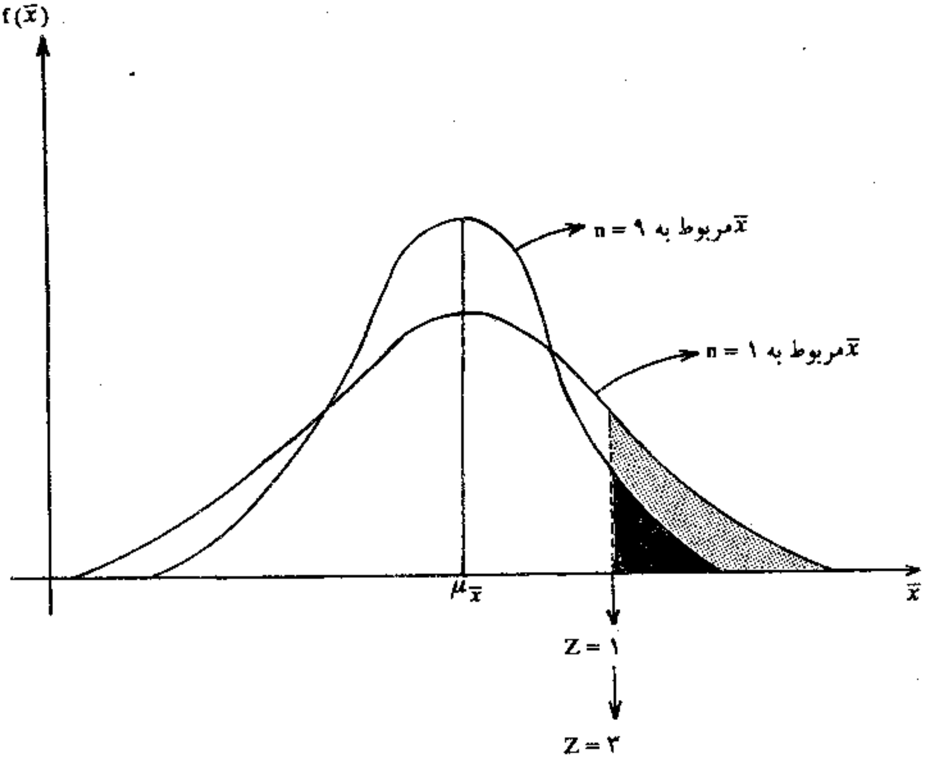
بنابراین می‌توان نوشت:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} = \frac{۱۸-۱۵}{\frac{۳}{\sqrt{۹}}} = ۳$$

$$P(\bar{X} \geq ۱۸) = P(Z \geq ۳) = ۱ - ۰/۹۹۸۷ = ۰/۰۰۱۳$$

مثال ۹ـ۶ از احتمالات به دست آمده از مثال ۹ـ۴ و ۹ـ۵ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

اگر توزیع X و $\bar{X}$ در مثال ۹ـ۴ و ۹ـ۵ را در این شکل رسم کنیم، براحتی می‌توان



شکل ۹.۹ مقایسهٔ توزیع $\bar{X}$ در n = ۱ و n = ۹

دریافت که با افزایش حجم نمونه، توزیع $\bar{X}$ کشیده‌تر می‌شود (این خاصیت مربوط به قضیهٔ حد مرکزی است). تا زمانی که n = ۱ است، احتمال مساوی ۰/۱۵۸۷ است در حالی که در n = ۹، احتمال مورد نظر بشدت کاهش می‌یابد؛ یعنی اینکه دنبالهٔ توزیع بشدت جمع شده است و داده‌های $\bar{X}$ حول میانگین خود؛ $\mu_{\bar{x}}$، متمرکز شده‌اند.

۹.۷ نظریه دربارهٔ رفتار $\bar{X}$

مسائل تصمیم‌گیری در مدیریت اغلب با استنباط مقدار میانگین جامعه همراه است؛ برای مثال ممکن است متوسط نمره‌های مسئولیت‌پذیری مدیران و یا تأخیر روزانه تولید در خط مونتاژ و یا تقاضای روزانه را در نظر داشته باشیم.

تخمین زننده‌های مختلفی همچون؛ میانه، میانگین پیراسته، نیم‌دامنه[1] و

---

1. mid range

همین‌طور میانگین نمونه ($\bar{X}$) برای برآورد میانگین جامعه وجود دارد. هریک از تخمین‌زننده‌ها در توزیع نمونه گیری خود در مقایسه با همدیگر دارای معایب و محاسنی هستند. براساس خواص مطلوب آماره‌ها مشخص شد که $\bar{X}$ نسبت به تمام آماره‌های دیگر دارای خواص مطلوبتری است، بدین جهت در تخمین μ_x، از میانگین نمونه و توزیع آن به نحو وسیعی استفاده می‌شود.

هرگاه یک نمونه n تایی از یک جامعهٔ محدود[1] با N عضو که دارای میانگین و واریانس، σ_x^2، مشخص است انتخاب شود، توزیع میانگین نمونه دارای این خواص خواهد بود:

$$\mu_{\bar{x}}=\mu_X \qquad (۹_۱۷)$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad (۹_۱۸)$$

واضح است که رابطه ۹ـ۱۷ با جامعهٔ نامحدود تفاوتی ندارد، ولی رابطهٔ ۹ـ۱۸ دارای ضریب $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ است که آن را از رابطهٔ مربوط به جامعهٔ نامحدود (نمونه گیری با جایگذاری) متمایز می‌کند. ضریب مورد نظر از وابستگی X_2 به X_1 و همین طور X_i به X_{i-1} حکایت دارد. به طوری که هر انتخاب بر انتخابهای بعدی خود تأثیر می‌گذارد. این همبستگی را خودهمبستگی[2] گویند که براحتی می‌توان فهمید یک نوع همبستگی منفی است. پس اگر $n = 2$ باشد می‌توان نوشت:

$$V(\bar{X})=V(\frac{X_1+X_2}{2}) \qquad (۹_۱۹)$$

$$=\frac{1}{4}V(X_1+X_2)$$

یعنی:

$$V(\bar{X})=\frac{1}{4}[V(X_1)+V(X_2)]+2Cov(X_1,X_2) \qquad (۹_۲۰)$$

ملاحظه می‌شود که $V(\bar{X})$ به وسیلهٔ کوواریانس منفی، اندکی کاهش می‌یابد. به‌طور مشابه برای نمونه‌ای از n مشاهده استخراج شده از جامعهٔ N عضوی می‌توان ثابت

---

1. finite population 2. autocorrelation

کرد که واریانس $\bar{X}$ طبق این فرمول کاهش می‌یابد:

$$\text{ضریب کاهش} = \frac{N-n}{N-1} \qquad (۹-۲۱)$$

کمیت رابطه ۹-۲۱ به عنوان یک عامل اصلاح جامعهٔ محدود[1] تلقی و بیشتر اوقات در محاسبات نادیده گرفته می‌شود. بخصوص زمانی که نسبت n به N حداکثر ۵ درصد باشد.

مفروضات پایه‌ای. فرض ما در مباحث و فصول بعدی آن است که اندازهٔ نمونه، بزرگ و یا نمونه‌برداری از جامعه، نامحدود است؛ یعنی اینکه ضریب $\frac{N-n}{N-1}$ مساوی یک فرض می‌شود. همچنین انحراف معیار آماره‌ای که به عنوان تخمین‌زننده یک پارامتر استفاده می‌شود، خطای معیار تخمین‌زننده[2] نامیده می‌شود؛ برای مثال از این پس انحراف معیار $\bar{X}$ یعنی $\sigma_{\bar{x}}$ را خطای معیار میانگین نمونه می‌نامیم.

مثال ۹-۷ میانگین طول عمر محصولات کارخانه ۱۰۰ ساعت و پراکندگی آن ۱۶ ساعت است. یک نمونهٔ تصادفی ٦٤ تایی از محصولات تولیدی انتخاب شده است. احتمال اینکه میانگین طول عمر آنها دست کم ۹۵ ساعت باشد، چقدر است؟

براساس قضیهٔ حد مرکزی، توزیع $\bar{X}$ برای نمونهٔ ٦٤ تایی صرف‌نظر از توزیع عمر محصولات، نرمال است؛ پس:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_x}{\sigma_{\bar{x}}}$$

بنابراین:

$$P(\bar{X} \geq ۹۵) = P\left(Z \geq \frac{۹۵ - ۱۰۰}{\frac{۱٦}{\sqrt{٦٤}}}\right) = P(Z \geq -۲/۵)$$

$$= ۱ - ۰/۰۰٦۲ = ۰/۹۹۳۸$$

۰/۹۹۳۸ احتمال دارد که متوسط عمر نمونه‌های ٦٤ تایی دست کم ۹۵ ساعت باشد.

---

1. finite population correction factor
2. standard error of the estimator

تمرین

۱. یک نمونهٔ ۱۰۰ تایی از یک جامعهٔ غیرنرمال انتخاب شده که میانگین آن ۵۰ و انحراف معیارش ۱۰ است محاسبه کنید:

الف) مقدار میانگین و انحراف معیار توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ چقدر است؟

ب) براساس قضیهٔ حد مرکزی توزیع تقریبی میانگین نمونه‌ها کدام است؟

ج) از قضیهٔ حد مرکزی استفاده کرده، این احتمالات را محاسبه کنید:

$$P(\bar{X} > ۵۲)$$

$$P(\bar{X} \leq ۵۲)$$

۲. ضریب اصلاح $\frac{N-n}{N-1}$ برای محاسبهٔ انحراف معیار میانگین نمونه در یک جامعه محدود در چه صورتی قابل اغماض است؟

۳. آیا استفاده از ضریب اصلاح جامعهٔ محدود باعث کاهش انحراف معیار $\bar{X}$ می‌شود؟ چرا؟

۸ـ۹ توزیع نمونه‌گیری نسبت موفقیت در نمونه ($\bar{p}$)

بسیاری از محققان درصدد تخمین نسبت عناصری از جامعه آماری هستند که دارای یک ویژگی مورد نظرند. بعلاوه بسیاری از تحقیقها از مقیاس اسمی یا رتبه‌ای برخوردارند که پارامتر توصیف آنها نسبت موفقیت است. مواردی چون درصد کالاهای معیوب، درصد کارکنانی که از کار خود راضی هستند و درصد مدیرانی که وظیفه‌مدار هستند، همه از مصادیق این نوع تحقیقاتند. همچنان که مشاهده می‌شود این تحقیقات و موارد مشابه می‌توانند در قالب توزیع دو جمله‌ای بیان شوند؛ بنابراین رویه نمونه‌گیری در راستای ضرورتهای توزیع دو جمله‌ای شکل خواهد گرفت.

در یک آزمایش دو جمله‌ای با n تکرار عمل، تعداد موفقیتها، X ، و یا نسبت موفقیت در نمونه، $\frac{X}{n}$ ، شامل اطلاعاتی است که در راستای نسبت موفقیت در جامعه، p ، باشد؛ بنابراین دور از انتظار نیست اگر آمارهٔ مورد نظر به این صورت تعریف شود:

$$\bar{p} = \frac{X}{n} \qquad (۹\text{ـ}۲۲)$$

این آماره دارای یک توزیع نمونه‌گیری است که نقش مهمی در زمینه استنباط پارامتر p

(نسبت موفقیت در جامعه، $\frac{X}{N}$) ایفا می‌کند.

هر توزیع دو جمله‌ای از n توزیع برنولی تشکیل شده است. به خاطر داریم که هرگاه np و nq بزرگتر یا مساوی ۵ باشد، طبق قضیهٔ حد مرکزی، توزیع دو جمله‌ای از تقریب نرمال برخوردار است.[1] از سوی دیگر آمارهٔ $\bar{p}$ همانند آمارهٔ $\bar{X}$ بشدت تحت تأثیر نوع نمونه‌گیری (با جایگذاری یا بدون جایگذاری) است. در صورتی که نمونه‌گیری از یک جامعهٔ آماری محدود انجام گیرد، گفته می‌شود که $\frac{n}{N}$ بزرگتر از پنج درصد بوده است. در این صورت رابطه‌های زیر برقرار است:

$$E(\bar{p}) = \mu_{\bar{p}} = p \qquad (۹\text{-}۲۳)$$

$$\sigma_{\bar{p}}^{2} = \frac{p(1-p)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \qquad (۹\text{-}۲۴)$$

واضح است که همانند توزیع $\bar{X}$ واریانس آماره باید با ضریب کاهش $\frac{N-n}{N-1}$ تصحیح شود. از آنجا که اثبات رابطهٔ ۹ـ۲۴ پیچیده است، صحت روابط را با استفاده از مثال ۹ـ۸ بررسی خواهیم کرد.

مثال ۹ـ۸ شرکتی دارای ۵ مدیر است که سوابق اجرایی آنها، X، به این شرح است:

مدیر:	A	B	C	D	E
تجربه:	۱۰	۵	٤	۱۲	۸

ویژگی مورد نظر مدیر عامل، مدیران با تجربهٔ کمتر از ٦ سال است. ضمن تهیهٔ توزیع $\bar{p}$ در یک نمونهٔ ۳ تایی از مدیران شرکت، صحت روابط ۹ـ۲۳ و ۹ـ۲٤ را بررسی کنید.

در یک نمونه‌گیری واقعی (بدون جایگذاری) با استفاده از $\binom{5}{3}$ مشخص می‌شود که ۱۰ ترکیب سه‌تایی از جامعهٔ آماری می‌توان انتخاب کرد. مشخصات و مقادیر نمونه و همچنین تفصیل توزیع $\bar{p}$ در این جدول آمده است:

---

۱. برای اطلاع بیشتر به فصل آخر از جلد اول مراجعه شود.

جدول ۹ـ۶ مشخصات نمونه‌های سه‌تایی از مدیران شرکت و توزیع $\bar{p}=\frac{X}{n}$

شماره نمونه	مشخصات نمونه	مقادیر نمونه	$\bar{p}=\frac{X}{n}$	$f(\bar{p})$
۱	A,B,C	۱۰,۵,۴	$\frac{۲}{۳}$	۰/۱۰
۲	A,B,D	۱۰,۵,۱۲	$\frac{۱}{۳}$	۰/۱۰
۳	A,B,E	۱۰,۵,۸	$\frac{۱}{۳}$	۰/۱۰
۴	A,C,D	۱۰,۴,۱۲	$\frac{۱}{۳}$	۰/۱۰
۵	A,C,E	۱۰,۴,۸	$\frac{۱}{۳}$	۰/۱۰
۶	A,D,E	۱۰,۱۲,۸	۰	۰/۱۰
۷	B,C,D	۵,۴,۱۲	$\frac{۲}{۳}$	۰/۱۰
۸	B,C,E	۵,۴,۸	$\frac{۲}{۳}$	۰/۱۰
۹	B,D,E	۵,۱۲,۸	$\frac{۱}{۳}$	۰/۱۰
۱۰	C,D,E	۴,۱۲,۸	$\frac{۱}{۳}$	۰/۱۰

احتمال رخداد هریک از عناصر $\bar{p}$ مساوی ۰/۱۰ خواهد شد. چون فضای نمونه ۱۰ عضو گسسته با مقادیر ۰، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ دارد.

به منظور رعایت اختصار، دو ستون آخر جدول ۹ـ۶ در این جدول خلاصه می‌شود؛ مقادیر تکرار $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ یک بار نوشته شده و احتمالات آنها جمع می‌گردد.

جدول ۹ـ۷ تابع توزیع $\bar{p}$ برای جدول ۹ـ۶

$\bar{p}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$
$f(\bar{p})$	۰/۱۰	۰/۶۰	۰/۳۰

تابع فوق یک تابع احتمال است، چون شرایط تابع احتمال ناپیوسته به شرح زیر در آن صادق است:

۱) $۰ \leq f(\bar{p}) \leq ۱$ (۹ـ۲۵)

۲) $\Sigma f(\bar{p}) = ۱$ (۹ـ۲۶)

حال می‌توان صحت روابط ۹ـ۲۳ و ۹ـ۲٤ را به کمک جدول ۹ـ۸ و محاسبات لازم به این شرح مشاهده کرد:

جدول ۹.۸ محاسبات میانگین و واریانس $\bar{p}$

$\bar{p}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	مجموع
$f(\bar{p})$	۰/۱۰	۰/٦۰	۰/۳۰	۱
$\bar{p}f(\bar{p})$	۰	$\frac{٦}{۳۰}$	$\frac{٦}{۳۰}$	$\frac{۱۲}{۳۰}=۰/٤۰$
$\bar{p}^۲f(\bar{p})$	۰	$\frac{٦}{۹۰}$	$\frac{۱۲}{۹۰}$	$\frac{۱۸}{۹۰}=۰/۲۰$

حال به بررسی روابط ۹ـ۲۳ و ۹ـ۲٤ می‌پردازیم:

$$E(\bar{p})=۰/٤۰ \Rightarrow E(\bar{p})=p \text{ یعنی: } ۰/٤۰=\frac{۲}{۵}$$

و:

$$\sigma_{\bar{p}}^۲=E(\bar{p}^۲)-\mu_{\bar{p}}^۲ \text{ یا } \sigma_{\bar{p}}^۲=\frac{p(۱-p)}{n}\left(\frac{N-n}{N-۱}\right)$$

یعنی:

$$\sigma_{\bar{p}}^۲=۰/۲۰-(۰/٤۰)^۲=۰/۰٤ \text{ یا } ۰/۰٤=\frac{۰/٤۰(۰/٦۰)}{۳}\left(\frac{۵-۳}{۵-۱}\right)$$

صدق روابط بخوبی از مقادیر فوق دیده می‌شود.

چنانچه نمونه‌گیری با جایگذاری باشد یا نمونه‌گیری از جامعهٔ نامحدود انجام گیرد، براحتی می‌توان از ضریب کاهش $\left(\frac{N-n}{N-۱}\right)$ در محاسبهٔ واریانس $\bar{p}$ صرف‌نظر کرد. در نتیجه روابط ۹ـ۲۳ و ۹ـ۲٤ به این صورت تغییر خواهد کرد:

$$E(\bar{p})=p \quad (۹\text{ـ}۲۷)$$

$$\sigma_{\bar{p}}^۲=\frac{p(۱-p)}{n} \quad (۹\text{ـ}۲۸)$$

که در این روابط p نسبت موفقیت جامعه است. تنها تفاوت روابط فوق با روابط ۹ـ۲۳ و

۲۴ـ۹ حذف ضریب کاهش می‌باشد.

مثال ۹ـ۹ مدیر یک کارخانه درصدد تولید کالای جدید است. این مدیر می‌خواهد یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ تایی از بین مشتریان بالقوه انتخاب و با آنها مصاحبه کند تا درصد تمایل در نمونه‌های صدتایی برای او مشخص شود. فرض کنید ۵۰ درصد از مشتریان بالقوه به خرید کالا تمایل دارند. احتمال اینکه دست کم ۳۰ درصد نمونهٔ انتخاب شده به مصرف کالا تمایل داشته باشند، چقدر است؟

با توجه به حجم نمونه می‌توان فرض بزرگ بودن را برای اندازه نمونه پذیرفت و براساس قضیهٔ حد مرکزی به شرح زیر از توزیع نرمال برای حل مسأله استفاده کرد:

$$Z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

پس:

$$P(\bar{p} \geq \%30) = P\left(Z \geq \frac{0/30 - 0/50}{\sqrt{\frac{0/50 \times 0/50}{100}}}\right)$$

$$= P(Z \geq -4) = 1$$

۱۰۰ درصد احتمال دارد که دست کم ۳۰ درصد نمونهٔ ۱۰۰ تایی از کالای جدید مصرف کنند.

تمرین

۱. در چه شرایطی می‌توان پذیرفت که توزیع نمونه گیری برای $\bar{p}$، تقریباً نرمال است؟

۲. مقادیر pq را به ازای مقادیر ۰/۱۰، ۰/۲۰، ۰/۳۰، ... و ۰/۹۰ برای p پیدا کنید. به ازای چه مقداری از p، حاصلضرب $p \times q$ حداکثر می‌شود؟ بنویسید در یک نمونهٔ فرضی، در چه حالتی واریانس $\bar{p}$ حداکثر می‌گردد؟

۳. تحقیقات نشان می‌دهد که نسبت مدیران وظیفه مدار در سازمانهای کشور ۶۰ درصد است. از بین مدیران کشور یک نمونه تصادفی ۴۰۰ نفره انتخاب شده است. احتمال اینکه کمتر از ۵۵ درصد آنها وظیفه‌مدار باشند، چقدر است؟

۴. گزارشها نشان می‌دهد که ۱۰ درصد تصمیم‌گیرندگان، اطلاعات تولیدی را به طور مستقیم از فروشندگان دریافت می‌کنند. اگر این درصد درست باشد، احتمال اینکه در یک نمونه تصادفی ۲۰۰ تایی از تصمیم‌گیرندگان، بیش از ۱۳ درصد، اطلاعات تولیدی خود را به طور مستقیم از فروشندگان دریافت کنند، چقدر است؟

۹ـ۹ خلاصه

آمار استنباطی شامل فنونی است که اساس آنها نمونه و توزیعهای نمونه گیری است. در این فصل به دلایل نمونه گیری و روشهای نمونه گیری، مثل تصادفی ساده، منظم، گروهی، خوشه‌ای و مرحله‌ای پرداخته شد. تعریف قضیهٔ حد مرکزی و کاربرد آن در تعریف توزیع نمونه گیری میانگین نمونه، $\bar{X}$، و نسبت موفقیت نمونه، $\bar{p}$، از دیگر مباحث مطرح شده در فصل است.

انتخاب آماره‌های مناسب برای استنباط پارامترهای موردنظر برپایهٔ خواص مطلوب آماره برقرار است که شاخص اصلی آنها میانگین مجذور خطا (MSE) می‌باشد. چنانچه حجم نمونه به سمت بی‌نهایت و MSE به سمت صفر میل کند، گفته می‌شود که آماره یک آمارهٔ سازگار است. چنین آماره‌ای دارای اریب صفر و کمترین واریانس خواهد بود.

همچنین در این فصل توزیعهای $\bar{X}$ و $\bar{p}$ بتفصیل مطرح و خواص هریک از آنها بحث و بررسی شد. $\bar{X}$ را آمارهٔ میانگین جامعه؛ μ_x، md را آمارهٔ میانه جامعه؛ Md، S_x^2 را آمارهٔ واریانس جامعه؛ σ_x^2 و $\bar{p}$ را آماره نسبت موفقیت جامعه P؛ می‌خوانند.

۹ـ۱۰ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. آماره، تابعی از مشاهدات جامعه است. ص □ غ □

۲. پارامتر به شاخصی اطلاق می‌شود که با سرشماری محاسبه گردد. ص □ غ □

۳. هر آماره خود یک متغیر تصادفی است. ص □ غ □

۴. اگر نسبت $\frac{n}{N}$ بیش از ۵ درصد باشد، ضریب تصحیح $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ برای واریانس $\bar{X}$ قابل اغماض است. ص □ غ □

خواص نمونه گیری بدون جایگذاری از یک جامعه نامحدود مانند نمونه گیری با جایگذاری است. ص □ غ □

۶. میانگین هر نمونهٔ n تایی با میانگین جامعه مساوی است. ص □ غ □

۷. قضیهٔ حد مرکزی، صرفاً مربوط به نمونه گیری از جوامع نامتقارن است. ص □ غ □

۸. روش نمونه گیری خوشه‌ای از روش نمونه گیری گروهی دقیقتر است. ص □ غ □

۹. ضریب تصحیح $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ ناشی از کوواریانس مثبت بین مشاهدات نمونه است. ص □ غ □

۱۰. رفتار توزیع نمونه گیری $\bar{p}$ از قضیهٔ حد مرکزی تبعیت می‌کند. ص □ غ □

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. در یک جامعهٔ آماری که از نظر صفت مورد نظر ناهمگون است، کدام یک از این روشها برای نمونه‌گیری مناسب است؟

الف) تصادفی ساده — ج) گروهی

ب) منظم — د) هر سه

۱۲. توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ دارای میانگین ۱۲۰ است. میانگین واقعی جامعهٔ آماری چقدر است؟

الف) ۱۲۰ — ج) ۱۱۰

ب) ۱۳۰ — د) اطلاعات برای محاسبه میانگین واقعی کافی نیست.

۱۳. توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ دارای انحراف معیار ۲ است. اگر انحراف معیار جامعهٔ آماری ۱۲ باشد، مقدار n چقدر است؟

الف) ٦ — ج) ١٤٤

ب) ٣٦ — د) ۷۲

۱۴. رفتار توزیع نمونه‌گیری $\bar{p}$ در یک نمونهٔ تصادفی ۲۰۰ تایی از چه توزیع پیوسته‌ای برخوردار است؟

الف) یکنواخت — ج) نرمال

ب) نمایی — د) هیچکدام

۱۵. میانگین توزیع نمره‌های دانشجویان یک دانشکده ۵۲ و انحراف معیار آن ۱۵ است. احتمال اینکه میانگین یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ نفره کمتر از ۵۵ باشد، چقدر است؟

الف) ۰/۵۰ — ج) ۰/۹۷۷۲

ب) ۰/۲۲۸ — د) ۰/۵۷۹۳

۱۶. ۷۰ درصد کارمندان سازمان مرد هستند. احتمال اینکه دست کم ٦۰ درصد افراد یک نمونهٔ تصادفی ۱۵۰ نفره مرد باشند، چقدر است؟

الف) ۰/۹۹٦۲ — ج) ۰/۰۰۳۸

ب) ۰/٤۹٦۲ — د) ۱

۱۷. اگر یک توزیع آماری پیوسته دارای چولگی شدیدی باشد، مقدار نمونه دست کم چقدر باشد تا آمارهٔ $\bar{X}$ از تقریب نرمال برخوردار شود؟

الف) ۳۰ — ج) ٦۰

ب) ۵۰ — د) ۱۰۰

۱۸. حجم نمونه چقدر باشد تا توزیع $\bar{X}$ همان توزیع X شود؟

الف) $n = N$ — ج) $n = ۳۰$

ب) $n = ۱$ — د) $n > ۳۰$

۱۹. آمارهٔ $\bar{X}$ یک آمارهٔ سازگار است؛ چون وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، $\bar{X}$ به سمت ... میل می‌کند.

الف) ∞ ج) μ_x

ب) $N\mu_x$ د) صفر

۲۰. کدام یک از روشهای نمونه گیری زیرمبنای نمونه گیری مرحله‌ای است؟

الف) گروهی ج) خوشه‌ای

ب) منظم د) تصادفی ساده

۲۱. در رابطهٔ $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2_x}{n}$ با افزایش حجم نمونه چه اتفاقی می‌افتد؟

الف) کشیدگی توزیع $\bar{X}$ کمتر از توزیع X می‌شود.

ب) کشیدگی توزیع $\bar{X}$ بیشتر از توزیع X می‌شود.

ج) چولگی توزیع $\bar{X}$ بیشتر از توزیع X می‌شود.

د) دنباله‌های توزیع $\bar{X}$ طولانی‌تر می‌شود.

۲۲. اگر (آماره) E بزرگتر از پارامتر باشد، کدام یک از این گزینه‌ها درست است.

الف) آماره دارای اریب است.

ب) آماره دارای کمترین واریانس است.

ج) آماره سازگار است.

د) باید نوع آماره مشخص باشد تا بتوان اظهارنظر کرد.

مسائل

۲۳. یک تحلیلگر آمار بیان داشته است که «وقتی حجم نمونه بزرگ باشد، احتمال اینکه میانگین نمونه، بالای میانگین جامعه باشد به همان اندازه است که زیر آن باشد». آیا با این نظر موافقید؟ توضیح دهید.

۲۴. در کنفرانس درس آمار یکی از دانشجویان دربارهٔ قضیهٔ حد مرکزی اظهار کرد: «قضیه تضمین می‌کند که n موجود در نمونه‌ای تصادفی، اگر به قدر کافی بزرگ باشد، تقریباً به صورت نرمال توزیع می‌شود». توضیح دهید آیا این دانشجو مفهوم قضیهٔ حد مرکزی را فهمیده است؟

۲۵. از یک جامعهٔ آماری به تعداد ۵۰ هزار نفر، یک نمونهٔ تصادفی ۵۰۰ نفره انتخاب می‌شود. اگر ملاک کارآیی آمارهٔ $\bar{X}$، MSE باشد، بنویسید از کدام یک از روشهای نمونه گیری با جایگذاری و بدون جایگذاری استفاده خواهید کرد؟ چنانچه تعداد نمونه به ۵ هزار نفر افزایش یابد چه روشی را اعمال خواهید کرد و چرا؟

۲۶. یک کارخانه کفش‌دوزی ماشینی دارد که از تکه‌های ضخیم لاستیک فشرده شده قطعاتی را برای استفاده در تخت یک نوع کفش مردانه برش می‌دهد. اندازه‌های ضخامت این تختهای

کفش به طور نرمال با انحراف معیار، ۰/۲۰ میلیمتر توزیع شده‌اند. گاهی به سبب بعضی دلایل پیش‌بینی نشدنی، میانگین از هدف تعیین شده‌اش (۲۵ میلیمتر) دورتر است. برای اینکه بموقع اندازه‌ها تصحیح شود، لازم است که ضخامت نمونه‌ای تصادفی از تختهای کفش را که به طور متناوب از میان کفشهای تولید شده انتخاب می‌شود، اندازه گیری کرد. فرض کنید که از روش زیر برای ارزیابی کیفیت تولید استفاده شود.

اندازه‌های ضخامت برای نمونه‌ای تصادفی مرکب از پنج تخت کفش را به دست آورده و میانگین نمونه ($\bar{X}$) ثبت می‌شود. اگر $\bar{X} < ۲۴/۸$ یا $\bar{X} > ۲۵/۲$ باشد، ماشین را خارج از کنترل به حساب آورده و بعد از آن تولید متوقف می‌گردد و برای استفادهٔ دوباره باید ماشین مجدداً تنظیم شود، محاسبه کنید:

الف) وقتی که میانگین واقعی برابر با ۲۵ میلیمتر باشد، احتمال اینکه نمونه‌ای، وضعیت را «خارج از کنترل» نشان دهد، چقدر است؟

ب) فرضاً میانگین واقعی به ۲۵/۳ میلیمتر تغییر کرده است، احتمال اینکه نمونه‌ای، وضعیت را «خارج از کنترل» نشان دهد چقدر است؟

۲۷. توزیع X به این صورت تعریف شده است:

x_i	۰	۱	۲
$f(x_i)$	۰/۷۰	۰/۲۰	۰/۱۰

الف) میانگین و انحراف معیار این جامعهٔ نامحدود را محاسبه کنید.

ب) توزیع نمونه گیری $\bar{X}$ را برای نمونه‌ای تصادفی به حجم ٤ بنویسید؟

راهنمایی:

$$y_۱ = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}$$

$$y_۲ = \frac{x_۳ + x_٤}{۲}$$

$$\bar{X} = \frac{y_۱ + y_۲}{۲}$$

ج) صحت این روابط را بررسی کنید:

$$E(\bar{X}) = \mu_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

۲۸. نمره‌های دانشجویان مدیریت در یک آزمون استعداد، با میانگین ۲۰۰ و انحراف معیار ۳۶ به صورت نرمال توزیع شده است با توجه به این موارد

الف) برای ۹ = n میانگین و انحراف معیار را محاسبه کنید.

ب) برای ۹ = n احتمال اینکه $\bar{X}$ داخل فاصلهٔ ۰/۲۵± نمره از μ_x قرار گیرد، چقدر است؟

پاسخنامهٔ سؤالات

۱) غ	۲) ص	۳) ص	۴) غ
۵) ص	۶) غ	۷) غ	۸) غ
۹) غ	۱۰) ص	۱۱) ج	۱۲) الف
۱۳) ب	۱۴) ج	۱۵) ج	۱۶) الف
۱۷) الف	۱۸) ب	۱۹) ج	۲۰) ج
۲۱) ب	۲۲) الف		

کانال بایگانی فایل های حسابداری، حسابرسی، مالیاتی و مقالات
@Fileaccunting
مدیریت : امین یوسفیان

فصل دهم

تخمین آماری

۱۰-۱ مقدمه

استنباط در زندگی روزمره افراد، بخصوص در تصمیم‌گیری و پیش‌بینی، نقش مهمی دارد. ما هر روز با موقعیتها و شرایطی رو به رو می‌شویم که نیازمند پیش‌بینی آینده است. دولت به پیش‌بینی واردات و صادرات، سهامداران به شناخت وضعیت بازار سهام و مدیران سازمانها به شناخت رفتار کاری کارمندان نیاز دارند. همهٔ این استنباطها و پیش‌بینیها برپایهٔ اطلاعات خاصی است که ما آنها را مشاهده[1] یا داده[2] می‌نامیم. اغلب، داده‌هایی که برای استنباط استفاده می‌شوند بسیار اندک هستند؛ با وجود این تصمیم‌گیران در تلاشند با استفاده از این اطلاعات اندک، تصمیم نسبتاً درست و صحیحی اتخاذ کنند. بدین سبب هدف دانشمندان آماری آن است که روشهای ریاضی‌ای ارائه دهند که استنباط دربارهٔ جامعهٔ آماری برپایهٔ اطلاعات حاصل از نمونه هرچه مطلوبتر و بهتر انجام گیرد.

هدف از تحلیل و توصیف در آمار، جامعه آماری است که به دو طریق توصیف می‌شود: یا با استفاده از سرشماری کلیهٔ عناصر جامعه و محاسبهٔ «پارامتر» که در این صورت فنون آمار توصیفی به کار خواهد رفت و یا با استفاده از «تخمین زننده» برای برآورد پارامتر. شقی از آمار را استنباطی گویند که شامل فنون تخمین آماری و آزمون فرضیه‌ها می‌شود. اینکه به کدام طریق (تخمین یا آزمون) استنباط انجام گیرد به نوع تحقیق بستگی دارد. اگر تحقیق از نوع سؤالی و صرفاً حاوی پرسش درباره پارامتر باشد از تخمین آماری برای پاسخ به سؤال (سؤالات) استفاده می‌شود و اگر حاوی فرضیه‌ها بوده و از مرحلهٔ سؤال گذر کرده باشد، آزمون فرضیه‌ها و فنون آماری آن به کار می‌رود.

---

1. observation
2. data

در این فصل به بیان نظریه تخمین[1] پرداخته می‌شود و در فصل بعدی مبانی آزمونهای آماری تشریح می‌گردد.

هر نوع تخمینی از آمارهٔ انتخاب شده و توزیع نمونه گیری آن آغاز می‌شود. به طور کلی تخمین دو نوع است: الف) تخمین نقطه‌ای[2] و ب) تخمین فاصله‌ای[3].

۲ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای میانگین جامعهٔ آماری (μ_x)

بسیاری از تحقیقات مدیریتی با تخمین میانگین جامعهٔ آماری ارتباط پیدا می‌کند؛ برای مثال مدیریت یک سازمان ممکن است علاقه‌مند باشد میانگین نمره‌های ارزشیابی ماهانه کارکنان خود و یا میانگین رشد کاری و تولیدی آنها را بداند. بنابراین تخمین میانگین جامعه (μ_x) یکی از مهمترین موارد کاربرد آمار استنباطی است.

وقتی که از یک جامعهٔ نامحدود نمونه گیری می‌شود، توزیع میانگین نمونه ($\bar{X}$)، میانگینی برابر μ_x و انحراف معیاری مساوی با $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ خواهد داشت. اگر جامعهٔ مورد نمونه گیری نرمال باشد، بدون توجه به اندازهٔ نمونه، $\bar{X}$ همیشه دارای توزیع نرمال است. از سوی دیگر براساس قضیهٔ حد مرکزی وقتی ما از یک جامعهٔ غیرنرمال نمونه گیری می‌کنیم، اگر نمونه بزرگ باشد، توزیع $\bar{X}$ تقریب نرمالی دارد با میانگین μ_x و انحراف معیاری که با افزایش حجم نمونه بشدت کاهش پیدا می‌کند.

واضح است که در یک توزیع پیوسته، احتمال اینکه $\bar{X}$ با میانگین جامعه مساوی باشد، تقریباً صفر است. حال این سؤال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان احتمال برآورد μ_x را بالا برد؟ این سؤال را با تخمین فاصله‌ای پاسخ می‌دهیم. تخمین فاصله‌ای یک پارامتر جامعه، قاعده‌ای است که به ما می‌گوید چگونه دو مقدار را برپایهٔ داده‌های نمونه محاسبه کنیم تا $\bar{X}$ در وسط آن قرار گیرد. وقتی یک تخمین فاصله‌ای برای پارامتر جامعهٔ آماری به کار رود یک جفت عدد از تخمین زننده به دست می‌آید که آن را تخمین فاصله‌ای یا «فاصله اطمینان»[4] برای پارامتر گویند. عدد بزرگی که حد بالای فاصله را می‌سازد، «حد بالای اطمینان»[5] (UCL) و عدد کوچکی که حد پایین فاصله را می‌سازد،

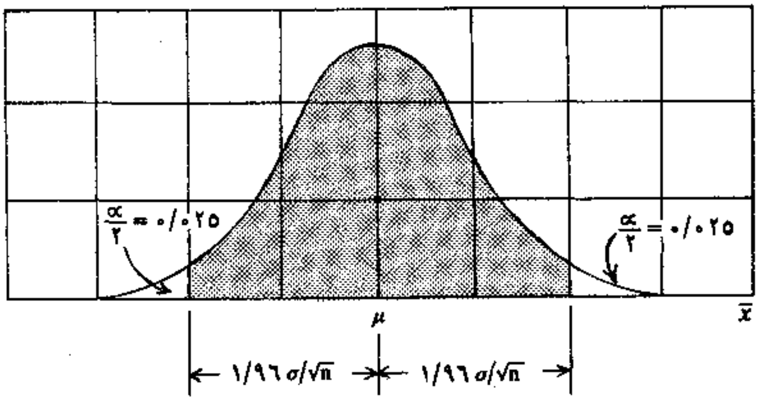
---

1. estimation theory
2. Point estimate
3. interval estimation
4. confidence interval
5. upper confidence limit

«حد پایین اطمینان»[1] (LCL) گفته می‌شود. براین اساس، تخمین فاصله‌ای μ_x به این صورت تعریف می‌شود:

$$\bar{X} \pm \mathcal{E} \qquad (۱۰-۱)$$

$\mathcal{E}$ مقدارثابتی است که می‌توان به کمک آن UCL و LCL راتعریف کرد و «دقت برآورد» نامیده می‌شود. سطح دلخواه در یک توزیع آماری که μ_x در آن قرار می‌گیرد همان فاصله اطمینان است که احتمال آن با P نشان داده می‌شود و «سطح اطمینان محقق» نامیده می‌شود. واضح است که فاصلهٔ اطمینان براساس سطح اطمینانی که محقق را راضی می‌کند، تعریف می‌شود. حال با فرض پذیرفتن سطح اطمینان ۹۵ درصد و نرمال بودن توزیع $\bar{X}$، فاصلهٔ اطمینان برای μ_x در شکل ۱-۱۰ نشان داده می‌شود:



شکل ۱-۱۰ تخمین فاصله‌ای μ_x در سطح اطمینان ۹۵ درصد

فضای خارج از $\bar{X} \pm ۱/۹۶ \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ را «سطح خطا» گویند که آن را با α نشان می‌دهند؛ بنابراین:

$$\alpha = ۱ - \text{سطح اطمینان} \qquad (۱۰-۲)$$

پس در سطح اطمینان ۹۵ درصد، سطح خطا ۵ درصد خواهد بود. واضح است که خطا می‌تواند در بالای UCL و یا پایین LCL رخ دهد و در اینجا مساوی ۲۵ درصد

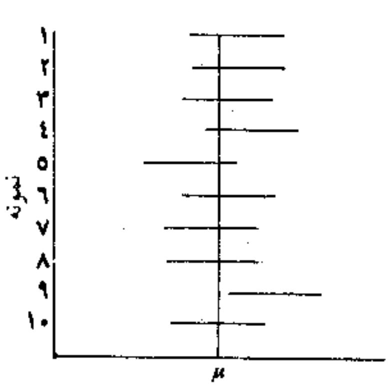
1. lower confidence limit

پایین‌تر از LCL و ۲۵ درصد بالاتر از UCL است.

سطح اطمینان، نسبتی از فاصله‌های اطمینان است که توسط نمونه‌های n تایی (هم حجم) ایجاد شده و در برگیرندهٔ پارامتر جامعه باشد؛ برای مثال فرض کنید، محققی به تخمین میانگین سود هفتگی یک شرکت کوچک تمایل دارد. اگر نمونه شامل ۲۰ مشاهده هفتگی باشد و n = ۲۰، ده بار تکرار شود و هر بار تخمین فاصله‌ای μ_x به عمل آید، می‌توان نتایج تخمینها را در شکل ۲ـ۱۰ مشاهده کرد.

در شکل ۲ـ۱۰ محور عمودی نشان‌دهندهٔ فاصلهٔ اطمینان برای هر بار تکرار نمونهٔ ۲۰ تایی و محور افقی نشان دهندهٔ عرض فواصل اطمینان است. توجه شود که به استثنای یک مورد تمام فواصل، شامل پارامتر μ_x هستند. در اینجا می‌توان گفت، سطح اطمینان ۹۰ درصد است؛ چون $\frac{۹}{۱۰}$ فواصل دربرگیرندهٔ پارامتر مجهول هستند.

یک فاصلهٔ اطمینان خوب، فاصله‌ای است که با کوچکترین عرض برآورد دربرگیرندهٔ پارامتر باشد. واضح است که فاصله‌ها از نظر مکان متفاوتند؛ زیرا $\bar{X}$ از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر می‌کند و همچنین طول فاصله‌ها نیز متفاوتند؛ زیرا S_x از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر تغییر می‌کند. بدین‌سبب گفته می‌شود که در سطح اطمینان ثابت، فاصلهٔ اطمینان خوب، فاصله‌ای است که با کوچکترین عرض از «صحت» برخوردار باشد (صحت یعنی تخمین به عمل آمده، دربرگیرندهٔ پارامتر مجهول باشد)؛ هرچه تخمینِ حاوی پارامتر دارای عرض کوچکتری باشد از «دقت» بالاتری برخوردار است. آنچه باعث بالارفتن صحت و دقت در یک فاصلهٔ اطمینان می‌شود، نمونهٔ بزرگتر است. این خاصیت همچنین در روابط ریاضی تخمین پارامترها به گونه‌ای مشهود است.



شکل ۲ـ۱۰ فواصل اطمینان برای میانگین سودهفتگی دریک‌نمونه ۲۰تایی

تخمین فاصله‌ای μ_x و یا مقدار $\mathcal{E}$ تحت تأثیر سطح اطمینان و توزیع $\bar{X}$ است. توزیع $\bar{X}$ با این شرایط تعیین می‌شود:

۱. نوع توزیع جامعهٔ آماری (نرمال یا غیرنرمال)،
۲. کیفیت انحراف معیار جامعه (معلوم یا نامعلوم)،
۳. اندازه نمونه (کوچک یا بزرگ).

ترکیبات شرایط فوق، توابع احتمال گوناگونی برای $\bar{X}$ پدید می‌آورد و در نتیجه مقدار ε و حدود اطمینان μ_x را در یک سطح اطمینان مشخص تحت تأثیر قرار می‌دهد. حال تخمین μ_x با توجه به ترکیبات مورد نظر تشریح می‌شود.

۱-۲-۱۰ توزیع جامعهٔ آماری نرمال و انحراف معیار آن، معلوم

فرض اساسی در این حالت آن است که نمونه از یک جامعه نرمال با انحراف معیار معلوم انتخاب شده است؛ بنابراین حجم نمونه هر اندازه باشد، توزیع $\bar{X}$ یک توزیع نرمال است و به این صورت استاندارد خواهد شد:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad (۱۰\text{-}۳)$$

داشتیم که $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ و $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$. از سوی دیگر بسته به مقدار $\bar{X}$ ممکن است علامت Z مثبت یا منفی و یا صفر باشد. همچنین مقدار Z در یک توزیع قرینه مساوی با $Z_{\frac{\alpha}{۲}}$ است. پس می‌توان رابطه ۳-۱۰ را چنین بیان کرد:

$$\pm Z_{\frac{\alpha}{۲}} = \frac{\bar{X} - \mu_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \qquad (۱۰\text{-}۴)$$

بنابراین برای تخمین فاصله‌ای μ_x می‌توان به این صورت عمل کرد:

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{۲}} \le Z \le +Z_{\frac{\alpha}{۲}}) = ۱ - \alpha \qquad (۱۰\text{-}۵)$$

حال اگر به جای Z تعریف آن را قرار دهیم، رابطه ۵-۱۰ به رابطه ۶-۱۰ تبدیل خواهد شد:

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{۲}} \le \frac{\bar{X} - \mu_x}{\sigma_{\bar{x}}} \le Z_{\frac{\alpha}{۲}}) = ۱ - \alpha \qquad (۱۰\text{-}۶)$$

حال برحسب مجهول، μ_x، رابطه را مرتب می‌کنیم:

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}} \leq \bar{X} - \mu_x \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$$

$$P(-\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}} \leq -\mu_x \leq -\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$$

داخل پرانتز در علامت منفی (−) ضرب می‌شود. رابطهٔ حاصل تخمین فاصله‌ای μ_x در این حالت است:

$$P(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}} \leq \mu_x \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}) = 1 - \alpha \qquad (١٠_٧)$$

رابطهٔ ٧ـ١٠ نشان می‌دهد که مقدار $\mathcal{E} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{x}}$ است. به عبارت دیگر با احتمال $(1-\alpha)$ ١٠٠ درصد میانگین جامعه در فاصلهٔ برآورد شده قرار می‌گیرد و با α١٠٠ درصد خطا، μ_x خارج از دامنهٔ فوق قرار خواهد گرفت.

مثال ١ـ١٠ بررسیها نشان می‌دهد که توزیع وزن محصولات تولید شدهٔ یک کارخانهٔ بزرگ، نرمال و انحراف معیار آن ٢١ تن است. از آنجا که اندازه گیری وزن محصولات به طور روزانه امکانپذیر نیست، یک نمونهٔ ٥٠ روزه از تولیدات، انتخاب شده است که میانگین وزن آن ٨٧١ تن است. در سطح اطمینان ٩٠ درصد میانگین واقعی وزن محصولات تولید شده طی یک روز را محاسبه کنید.

توزیع جامعه، نرمال و σ_xآن معلوم است. پس توزیع نمونه گیری $\bar{X}$ صرف نظر از حجم نمونه نرمال خواهد بود و تخمین میانگین واقعی وزن محصولات روزانه کارخانه براساس رابطه ٧ـ١٠ انجام خواهد گرفت. دراین مسأله $n = ٥٠$، $\bar{X} = ٨٧١$ و $\sigma_x = ٢١$ است.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{٠/١٠}{٢}} = Z_{٠/٠٥} = \pm ١/٦٤٥$$

بنابراین:

$$P(٨٧١ - ١/٦٤٥ \times \frac{٢١}{\sqrt{٥٠}} \leq \mu_x \leq ٨٧١ + ١/٦٤٥ \times \frac{٢١}{\sqrt{٥٠}}) = ٠/٩٠$$

در نتیجه:

$$(٨٦٦/١١ \leq \mu_x \leq ٨٧٥/٨٩)$$

تحلیل. با ٩٠ درصد اطمینان می‌توان گفت که وزن محصولات روزانه

کارخانه، میانگینی بین ۸٦٦/۱۱ تا ۸۷۵/۸۹ تن دارد و فقط ۱۰ درصد احتمال دارد که میانگین وزن تولیدات، خارج از این دامنه باشد. به عبارت دیگر میانگین وزن آنها ۵ درصد احتمال دارد کمتر از ۸٦٦/۱۱ و ۵ درصد ممکن است بالاتر از ۸۷۵/۸۹ تن باشد.

۲ـ۲ـ۱۰ توزیع جامعهٔ آماری نرمال و انحراف معیار آن نامعلوم

هرگاه انحراف معیار جامعه نامعلوم باشد در تخمین فاصله‌ای μ_x ناچار $S_{\bar{x}}$ جایگزین $\sigma_{\bar{x}}$ خواهد شد. $S_{\bar{x}}$ برآورد نقطه‌ای انحراف معیار توزیع $\bar{X}$ است. به عبارت دیگر علاوه بر برآورد نقطه‌ای μ_x یعنی $\bar{X}$ باید از آماره‌ای دیگر به جای σ_x یعنی S_x استفاده شود. این عمل موجب خواهد شد که رابطهٔ $\frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}}$ جایگزین رابطهٔ $\frac{\bar{X}-\mu_x}{\sigma_{\bar{x}}}$ شود. بدیهی است رابطه اول که دارای دو آماره است دارای دقتی کمتر از رابطهٔ بعدی است. یعنی اینکه ریسک آن بیشتر است. از سوی دیگر چون از یک جامعهٔ نرمال نمونه گیری شده است می‌توان متقارن بودن را برای توزیع $\bar{X}$ تصور کرد. پس در این حالت توزیع $\bar{X}$ یک توزیع متقارن است که دارای پراکندگی (ریسک) بیشتری به واسطهٔ نامعلوم بودن σ_x است. ثابت می‌شود آمارهٔ $\frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}}$ دارای توزیع t استیودنت است که t توزیعی قرینه است و از توزیع نرمال دقت کمتری (پراکندگی بیشتری) دارد؛ بنابراین می‌توان رابطهٔ ۸ـ۱۰ را جایگزین رابطهٔ ۳ـ۱۰ کرد.

$$t=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{x}}}{S_{\bar{x}}} \qquad (۱۰\text{ـ}۸)$$

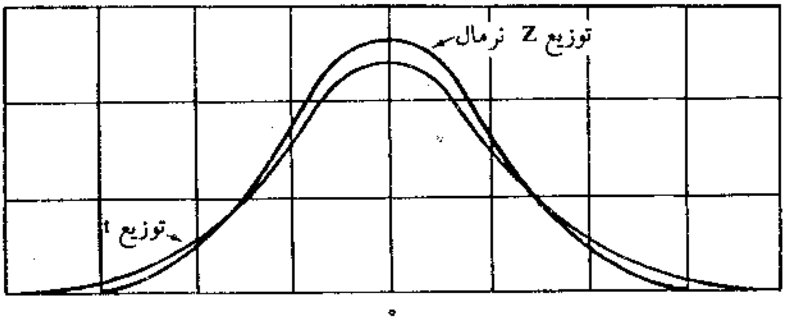
یا:

$$t=\frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}} \qquad (۱۰\text{ـ}۹)$$

شکل ۳ـ۱۰ رابطهٔ بین توزیع t و Z را بخوبی مشخص می‌کند. واضح است که ضریب چولگی توزیع t صفر، ولی ضریب کشیدگی آن منفی است.[1]

---

۱. برای یادآوری به مباحث پارامترهای تعیین انحراف از قرینگی و کشیدگی در فصل چهارم مراجعه شود.



شکل ۳ـ۱۰ مقایسهٔ نرمال استاندارد Z و توزیع t براساس n = ۳

چنانکه گاست[1]، واضع توزیع t، کشف کرد، توزیع t شدیداً تحت تأثیر حجم نمونه است. آمارهٔ $\bar{X}$ ناّاریب بوده، مخرج n−۱ که درفرمول S_x^2 مشاهده می‌شود، درجهٔ آزادی (d.f)[2] نامیده می‌شود که با S_x^2 در ارتباط است. مبنای اصطلاح درجهٔ آزادی به تعداد انحرافات مستقلی که در توزیع آمارهٔ S_x^2 برای تخمین σ_x^2 به کار می‌روند، اشاره دارد. در اینجا مخرج انحراف معیار نمونه را که n−۱ است درجهٔ آزادی (d.f) می‌خوانیم.

توزیع t استیودنت جداولی دارد که برحسب ∝ و درجهٔ آزادی نوشته شده است. چهارچوب جدول t استیودنت براساس شکل ٤ـ۱۰ ایجاد شده است. به طوری که با تعریف درجهٔ آزادی و مقدار $\frac{\alpha}{2}$ می‌توان مقدار t دلخواه را با علامت «(±)» استخراج کرد. جدول ۱ـ۱۰ بخشی از جدول t استیودنت را در جدول ۳ پیوست نشان می‌دهد. شکل ٤ـ۱۰ مکمل جدول ۱ـ۱۰ خواهد بود.

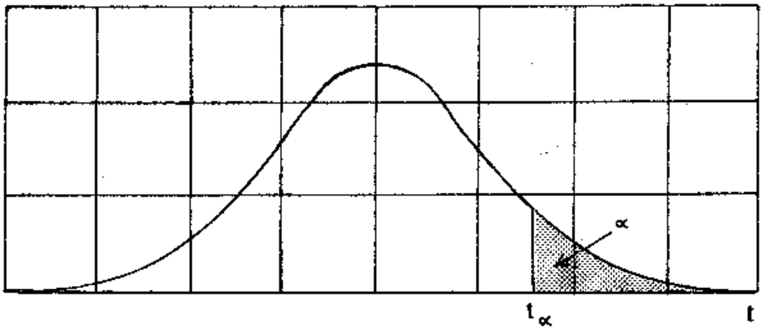
---

1. Gosset

2. degree of freedom

چنانچه مشاهداتی به منظور برآورد یک عدد به کار رود و عدد برآورد شده موجب استخراج نتایجی شود، دستیابی به این عدد سبب می‌شود مشاهداتی که برآورد براساس آنها صورت گرفته است، مقداری از آزادی خود را از دست بدهند؛ برای مثال فرض کنید می‌خواهیم ۵ عدد را انتخاب کنیم، در این انتخابها آزادی عمل برای انتخاب هر نوع عددی را داریم، یعنی در اینجا درجهٔ آزادی ۵ است. حال فرض کنید گفته شود که مجموع این ۵ عدد باید ۲۵ باشد، در این صورت با آزادی عمل کامل می‌توان چهار عدد را انتخاب کرد ولی انتخاب عدد پنجم به مجموع چهار عدد انتخاب شده بستگی دارد. در این صورت d.f=۵−۱=٤ خواهد بود.

توجه داشته باشید که درجه‌های آزادی قابل قبول همیشه n−۱ نیست و مقدار آن به پارامتری بستگی دارد که می‌خواهیم آن را برآورد کنیم. ذکر این نکته ضروری است که در هر روش آماری، شیوهٔ خاصی برای محاسبهٔ درجهٔ آزادی مناسب وجود دارد.



شکل ۱۰ـ۴ جدول مقادیر t استیودنت

جدول ۱۰ـ۱ چهارچوب جدول t استیودنت (جدول ۳ پیوست)

d.f.	$t_{۰/۱۰۰}$	$t_{۰/۰۵۰}$	$t_{۰/۰۲۵}$	$t_{۰/۰۱۰}$	$t_{۰/۰۰۵}$	d.f.
۱	۳/۰۷۸	۶/۳۱۴	۱۲/۷۰۶	۳۱/۸۲۱	۶۳/۶۵۷	۱
۲	۱/۸۸۶	۲/۹۲۰	۴/۳۰۳	۶/۹۶۵	۹/۹۲۵	۲
۳	۱/۶۳۸	۲/۳۵۳	۳/۱۸۲	۴/۵۴۱	۵/۸۴۱	۳
۴	۱/۵۳۳	۲/۱۳۲	۲/۷۷۶	۳/۷۴۷	۴/۶۰۴	۴
۵	۱/۴۷۶	۲/۰۱۵	۲/۵۷۱	۳/۳۶۵	۴/۰۳۲	۵
۶	۱/۴۴۰	۱/۹۴۳	۲/۴۴۷	۳/۱۴۳	۳/۷۰۷	۶
۷	۱/۴۱۵	۱/۸۹۵	۲/۳۶۵	۲/۹۹۸	۳/۴۹۹	۷
۸	۱/۳۹۷	۱/۸۶۰	۲/۳۰۶	۲/۸۹۶	۳/۳۵۵	۸
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۲۷	۱/۳۱۴	۱/۷۰۳	۲/۰۵۲	۲/۴۷۳	۲/۷۷۱	۲۷
۲۸	۱/۳۱۳	۱/۷۰۱	۲/۰۴۸	۲/۴۶۷	۲/۷۶۳	۲۸
۲۹	۱/۳۱۱	۱/۶۹۹	۲/۰۴۵	۲/۴۶۲	۲/۷۵۶	۲۹
inf.	۱/۲۸۲	۱/۶۴۵	۱/۹۶۰	۲/۳۲۶	۲/۵۷۶	inf.

براساس توضیحات فوق می‌توان نوشت:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{۲}, d.f} \leq t \leq t_{\frac{\alpha}{۲}, d.f}\right) = ۱-\alpha \qquad (۱۰_۱۰)$$

حال اگر t را براساس رابطهٔ ۹ـ۱۰ تعریف کنیم، خواهیم داشت:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}, d.f} \le \frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}} \le t_{\frac{\alpha}{2}, d.f}\right) = 1-\alpha \qquad (10\text{-}11)$$

حال برحسب مجهول مسأله، یعنی μ_x، رابطهٔ داخل پرانتز مرتب می‌شود:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}, d.f} . S_{\bar{x}} \le \bar{X}-\mu_x \le t_{\frac{\alpha}{2}, d.f} . S_{\bar{x}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}, d.f} . S_{\bar{x}} \le -\mu_x \le -\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}, d.f} . S_{\bar{x}}\right) = 1-\alpha$$

و بدین ترتیب:

$$P\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}, d.f} . S_{\bar{x}} \le \mu_x \le \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}, d.f} . S_{\bar{x}}\right) = 1-\alpha \qquad (10\text{-}12)$$

رابطهٔ ۱۲ـ۱۰ نشان دهندهٔ تخمین μ_x است در حالتی که حجم نمونه کوچک و σ_x نامعلوم است. در این رابطهٔ $S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$ می‌باشد.

براساس قضیهٔ حد مرکزی همچنان‌که حجم نمونه بزرگ می‌شود، توزیع t استیودنت همچون دیگر توزیعها به سمت توزیع نرمال میل می‌کند، به طوری که در $n>30$ می‌توان به جای توزیع t استیودنت از توزیع Z برای تخمین μ_x استفاده کرد. به عبارت دیگر متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z جایگزین t می‌شود، به طوری که رابطه زیر تقریباً برقرار است:

$$Z \simeq \frac{\bar{X}-\mu_x}{S_{\bar{x}}} \simeq t \qquad (10\text{-}13)$$

یعنی اینکه برای تخمین فاصله‌ای μ_x هم رابطه ۱۲ـ۱۰ کارساز است هم رابطه ۱۴ـ۱۰.

$$P\left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}} . S_{\bar{x}} \le \mu_x \le \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}} . S_{\bar{x}}\right) = 1-\alpha \qquad (10\text{-}14)$$

مثال ۲ـ۱۰ بازاریابی درصدد بررسی و برآورد قدرت خرید ساکنان یک محله تهران است. او ناچار باید یک نمونهٔ تصادفی ده‌تایی از بین خریداران انتخاب و قدرت خرید را برای هریک از آنها اندازه گیری کند. قدرت خرید نمونهٔ فوق

بر حسب ده هزار تومان چنین است:

$$x_i : ۸ , ۷ , ۵ , ۴ , ۱۲ , ۱۵ , ۱۰ , ۱۳ , ۱۴ , ۱۲$$

قدرت خرید ساکنان محله از توزیع نرمال برخوردار است. در سطح اطمینان ۹۵ درصد میانگین قدرت خرید آنها را برآورد کنید.

توزیع جامعه نرمال، ولی انحراف معیار جامعه نامعلوم است. همچنین حجم نمونه کمتر از ۳۰ می‌باشد. پس لزوماً باید از توزیع t استیودنت برای تخمین مورد نظر استفاده کرد؛ بنابراین رابطهٔ ۱۲ـ۱۰ را مجدداً تکرار کرده، محاسبات لازم را انجام می‌دهیم:

$$P(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{۲}, d.f} . S_{\bar{x}} \leq \mu_x \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{۲}, d.f} . S_{\bar{x}}) = ۱ - \alpha$$

در این رابطه لازم است $\bar{X}$ ، $S_{\bar{x}}$ را براساس داده‌های مسأله محاسبه کنیم.

x_i	۸	۷	۵	۴	۱۲	۱۵	۱۰	۱۳	۱۴	۱۲	$\Sigma x_i = ۱۰۰$
$(x_i - \bar{X})^۲$	۴	۹	۲۵	۳۶	۴	۲۵	۰	۹	۱۶	۴	$\Sigma (x_i - \bar{X})^۲ = ۱۳۲$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{۱۰۰}{۱۰} = ۱۰$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{X})^۲}{n - ۱}} = \sqrt{\frac{۱۳۲}{۱۰ - ۱}} = \sqrt{۱۴/۶۶۷} = ۳/۸۳۰$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{۲} = \frac{۰/۰۵}{۲} = ۰/۰۲۵ \\ d.f = n - ۱ = ۱۰ - ۱ = ۹ \end{cases} \Rightarrow t_{۰/۰۲۵, ۹} = \pm ۲/۲۶۲$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{۳/۸۳۰}{\sqrt{۱۰}} = ۱/۲۱۱$$

بنابراین مقادیر به دست آمده را در رابطهٔ ۱۲ـ۱۰ جایگذاری می‌کنیم.

$$P(۱۰ - ۲/۲۶۲ \times ۱/۲۱۱ \leq \mu_x \leq ۱۰ + ۲/۲۶۲ \times ۱/۲۱۱) = ۰/۹۵$$

$$۷/۲۶۱ \leq \mu_x \leq ۱۲/۷۳۹$$

تحلیل. با ۹۵ درصد اطمینان، میانگین قدرت خرید مشتریان بالقوه بین ۷/۲۶۱ تا ۱۲/۷۳۹ تومان خواهد بود.

۳ـ۲ـ۱۰ توزیع جامعه غیرنرمال

در صورتی که توزیع جامعه غیرنرمال و حجم نمونه بزرگتر از ۳۰ باشد، می‌توان برحسب مورد از رابطه‌های ۷ـ۱۰ و ۱۴ـ۱۰ استفاده کرد. در حالتی که انحراف معیار نامعلوم باشد از رابطه ۷ـ۱۰ و چنانچه σ_x نامعلوم باشد از رابطهٔ ۱۴ـ۱۰ برای تخمین μ_x استفاده می‌شود.

چنانچه حجم نمونه کوچک $(n < 30)$ است و جامعه به طور نرمال توزیع نشده‌است برای تنظیم فاصلهٔ اطمینان نمی‌توان از توزیع نرمال و t استیودنت استفاده کرد. در این حالت از قضیهٔ «چی‌بی‌شف» که در فصل چهارم بخش ٤ـ٤ تشریح شد استفاده می‌شود. براساس این قضیه، احتمال قرار گرفتن میانگین نمونه در بین K انحراف استاندارد، $\sigma_{\bar{x}}$، برابر است با:

$$P(|\bar{X}-\mu_x| \leq K\sigma_{\bar{x}}) \geq 1-\frac{1}{K^2} \qquad (10\text{-}15)$$

دراین عبارت σ_x معلوم تلقی شده است. اگر σ_x نامعلوم باشد از $S_{\bar{x}}$ استفاده می‌شود. برای ساختن فاصلهٔ اطمینان، ابتدا $1-\frac{1}{K^2}$ برابر درجهٔ مطلوب اطمینان قرار داده می‌شود و K به دست می‌آید. سپس در فاصله اطمینان بر این اساس که σ_x معلوم یا نامعلوم باشد از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$P(\bar{X}-K\sigma_{\bar{x}} \leq \mu_x \leq \bar{X}+K\sigma_{\bar{x}}) \geq 1-\alpha \qquad (10\text{-}16)$$

و یا:

$$P(\bar{X}-KS_{\bar{x}} \leq \mu_x \leq \bar{X}+KS_{\bar{x}}) \geq 1-\alpha$$

مثال ۳ـ۱۰ از شیشه‌های پرشده به وسیله یک دستگاه، یک نمونهٔ تصادفی ۲۵ تایی انتخاب شده است که میانگین ۲۵۰ میلی‌لیتر و انحراف معیار ۱۰ میلی‌لیتر دارد. هیچ دلیلی بر نرمال بودن توزیع مایع ریخته‌شده در شیشه‌ها وجود ندارد. در سطح اطمینان ۹۵ درصد، میانگین کل مایع ریخته شده در شیشه‌ها را برآورد کنید.

مقدار K عبارت است از:

$$1-\frac{1}{K^2}=1-\alpha \Rightarrow K=\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{0/05}}=\pm 4/47$$

بنابراین:

$$P(250-4/47\times\frac{10}{\sqrt{25}}\leq\mu_x\leq 250+8/94)\geq 0/95$$

$$(241/06\leq\mu_x\leq 258/94)$$

تحلیل. با حداقل ۹۵ درصد اطمینان می‌توان گفت که میانگین مایع ریخته شده به وسیله دستگاه در شیشه‌ها بین ۲۴۱/۰۶ تا ۲۵۸/۹۴ میلی‌لیتر است.

تمرین

۱. رابطهٔ بین عرض فاصلهٔ اطمینان را با سطح خطا وقتی که یک فاصلهٔ اطمینان ساخته می‌شود، توضیح دهید.

۲. فرض کنید که مقدار α ثابت باشد، رابطهٔ بین عرض فاصلهٔ اطمینان و اندازه نمونه (n) را توضیح دهید.

۳. یک نمونهٔ تصادفی n تایی از جامعه‌ای با میانگین μ_x و انحراف معیار σ_x، انتخاب شده است. میانگین و انحراف معیار نمونه به ترتیب ۴۵ = $\bar{X}$ و S_x=۵/۸ است. سطح اطمینان ۹۵ درصد را در نظر گرفته و فاصلهٔ اطمینان را در حالت n=۳۰، n=۶۰ و n=۹۰ محاسبه کنید و توضیح دهید کدام‌یک از فاصله‌ها عرض کمتر و کدام‌یک عرض بیشتری دارند؟ چرا؟

۴. مدیر یک سازمان بزرگ درصدد تعیین میانگین حقوق ماهانه کارمندان خود است. از آنجا که دسترسی به تمامی کارمندان سازمان امکانپذیر نیست، یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ نفره انتخاب‌شده که میانگین حقوق ماهانه آنها ۲۵ هزار تومان و انحراف معیار آن ۹۰۰ تومان است. چنانچه توزیع دستمزد کارمندان نرمال باشد، میانگین واقعی حقوق ماهانه آنها را در سطح اطمینان ۹۵ درصد برآورد کنید.

۵. رئیس دانشکده‌ای درصدد تعیین کیفیت تحصیلی دانشجویان خود است. وی معتقد است که معدل کل دانشجویان نشان دهندهٔ این مهم است. در این راستا از بین دانشجویان دانشکده یک نمونهٔ تصادفی ۱۲ نفره انتخاب کرده که معدل هریک از آنها به این شرح است:

$$x_i: 15,17,13,12,10,9,14,15,16,14,12,13$$

الف) فرض کنید توزیع معدل دانشجویان دانشکده نرمال است. تخمین لازم را در سطح خطای ۵ درصد به عمل آورید.

ب) فرض نرمال بودن توزیع معدل دانشجویان، یک فرض غیرواقعی جلوه می‌کند. چون ظاهراً نمره‌های دانشجویان چولگی دارد. مجدداً تخمین مناسب را به عمل آورید.

ج) توضیح دهید از مقایسهٔ نتایج بند «الف و ب» چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۳ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای تفاضل میانگین دو جامعه $(\mu_1-\mu_2)$

همچنان که برآورد میانگین واقعی یک جامعهٔ آماری اهمیت دارد، به همان نسبت و شاید هم بیشتر، مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری با استفاده از میانگین آنها نیز برای تصمیم‌گیری اهمیت دارد. همچون آمار توصیفی، اولین شاخص مقایسهٔ جوامع آماری از نظر سودآوری، دستمزد، کیفیت، هزینه و غیره میانگین آنهاست. ولی آنچه اهمیت این بحث را دو چندان می‌کند، این است که به جای میانگین جوامع آماری، میانگین نمونه‌ای n تایی از آنها در دسترس است؛ بنابراین مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری باید با استفاده از میانگینهای نمونه‌ها صورت گیرد.

اگر μ_1 و σ_1^2 به ترتیب میانگین و واریانس جامعهٔ اول و μ_2 و σ_2^2 به ترتیب میانگین و واریانس جامعهٔ دوم باشند؛ پس n_1 و n_2 به ترتیب دو نمونهٔ تصادفی از جامعه اول و دوم هستند که فرض می‌شود از همدیگر مستقلند. این نمونه‌ها هریک آماره‌های $\bar{X}_1$ و S_1^2 برای جامعهٔ اول و $\bar{X}_2$ و S_2^2 برای جامعهٔ دوم دارند.

اولین روشی که به ذهن هر تصمیم‌گیرنده‌ای برای مقایسهٔ میانگین دو جامعه می‌رسد، استفاده از تخمین فاصله‌ای بحث شده در بخش ۲ـ۱۰ است؛ ولی بخوبی می‌دانیم شناخت علامت تفاضل میانگینها ما را از دو تخمین جداگانه رها می‌سازد. پس بدین ترتیب پارامتر $\mu_1 - \mu_2$ شکل می‌گیرد. بخوبی می‌توان فهمید که $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$، یک آمارهٔ نااریب برای $\mu_1 - \mu_2$ با کمترین واریانس خواهد بود. پس با شناخت توزیع نمونه گیری $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ می‌توان به تخمین فاصله‌ای $\mu_1 - \mu_2$ پرداخت. تخمین فاصله‌ای به عمل آمده به ما کمک خواهد کرد که براحتی جوامع آماری را با همدیگر مقایسه کنیم.

اگر $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، پس:

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} \qquad (۱۰\text{ـ}۱۷)$$

یعنی:
$$\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\mu_1-\mu_2$$

و:

(۱۰ـ۱۸)
$$\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sigma^2_{\bar{x}_1}+\sigma^2_{\bar{x}_2}$$

یعنی:
$$\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

و به عبارت دیگر:

(۱۰ـ۱۹)
$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

همچنین داشتیم «ترکیب خطی دو متغیر تصادفی مستقل نرمال است اگر توزیع هریک از آنها نرمال باشد».

حاصل قضایای فوق ما را به این اصل می‌رساند که تمامی مفاهیم بیان شده در بحث تخمین فاصله‌ای μ_x به تخمین تفاضل $\mu_1-\mu_2$ نیز قابل تعمیم است. حال تخمین فاصله‌ای $\mu_1-\mu_2$ را می‌توان بدین صورت تعریف عمومی کرد:

(۱۰ـ۲۰)
$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm\mathcal{E}$$

مقدار $\mathcal{E}$ صرف نظر از سطح اطمینان به این شرایط بستگی دارد:

۱. نوع توزیع آماری دو جامعهٔ مورد نمونه گیری (نرمال یا غیرنرمال)،

۲. کیفیت انحراف معیار دو جامعهٔ مورد نمونه گیری (معلوم یا نامعلوم، مساوی یا نامساوی)،

۳. مقدار درجهٔ آزادی، $d.f=n_1+n_2-2$، (بزرگ یا کوچک).

ترکیبات شرایط فوق روابط مختلفی برای تخمین فاصله‌ای $\mu_1-\mu_2$ پدید خواهد آورد که به ترتیب توضیح داده می‌شود.

۱۰ـ۳ـ۱ توزیع دو جامعهٔ آماری نرمال و σ_1 و σ_2 معلوم

چون توزیع جامعه نرمال و σ_1 و σ_2 معلوم است پس توزیع $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ نیز نرمال می‌باشد؛ بنابراین براساس قضایای ۱۰ـ۱۷ و ۱۰ـ۱۸ می‌توان متغیر استاندارد Z را به این صورت تعریف کرد:

(۱۰ـ۲۱)
$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}}$$

با جایگذاری این مقدار برای Z در رابطهٔ:

$$P[-Z_{\frac{\alpha}{۲}} \leq Z \leq Z_{\frac{\alpha}{۲}}] = ۱ - \alpha \qquad (۱۰\text{-}۲۲)$$

داریم:

$$P[-Z_{\frac{\alpha}{۲}} \leq \frac{(\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲) - (\mu_۱ - \mu_۲)}{\sigma_{\bar{x}_۱ - \bar{x}_۲}} \leq Z_{\frac{\alpha}{۲}}] = ۱ - \alpha$$

که از آن این فاصلهٔ اطمینان نتیجه می‌شود:

(۱۰-۲۳)

$$P[(\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲) - Z_{\frac{\alpha}{۲}} \cdot \sigma_{\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲} \leq \mu_۱ - \mu_۲ \leq (\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲) + Z_{\frac{\alpha}{۲}} \cdot \sigma_{\bar{x}_۱ - \bar{x}_۲}] = ۱ - \alpha$$

مثال ٤-۱۰ هدف از تحقیقی، مقایسهٔ عملکرد کارمندان در دو سازمان است؛ ملاک مقایسه میانگین دو جامعهٔ آماری است. البته به دلیل در دسترس نبودن عملکرد کلیهٔ کارمندان، محققان ناچارند به نمونه‌هایی از هر جامعه اکتفا کنند. از سازمان «الف» یک نمونهٔ تصادفی ۲۵ نفره انتخاب شده که میانگین آن ٦۰ بوده است و از سازمان «ب» یک نمونهٔ تصادفی ۲۰ نفره که میانگینش ۵۵ است. توزیع نمره‌های عملکرد هر دو سازمان نرمال و انحراف معیار عملکرد در هر دو جامعه به ترتیب ۱۰ و ۱۲ است. در سطح اطمینان ۹۹ درصد میانگین عملکرد دو جامعه را با یکدیگر مقایسه کنید.

چون توزیعها برای هر دو جامعه نرمال بوده، $\sigma_۱=۱۰$ و $\sigma_۲=۱۲$ است، از رابطهٔ ۲۳-۱۰ برای تخمین $\mu_۱-\mu_۲$ استفاده می‌شود:

سازمان «الف»	سازمان «ب»
$n_۱=۲۵$	$n_۲=۲۰$
$\bar{X}_۱=٦۰$	$\bar{X}_۲=۵۵$
$\sigma_۱=۱۰$	$\sigma_۲=۱۲$
توزیع نرمال	توزیع نرمال

$$Z_{\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۰۰۵} = \pm ۲/۵۸$$

بنابراین:

$$\mathcal{E} = ۲/۵۸ \times \sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}$$

خواهد بود؛ یعنی:

$$\mathcal{E} = ۲/۵۸ \times \sqrt{\frac{۱۰۰}{۲۵} + \frac{۱۴۴}{۲۰}} = ۸/۶۳۴$$

$$P[(۶۰-۵۵) - ۸/۶۳۴ \le \mu_۱ - \mu_۲ \le (۶۰-۵۵) + ۸/۶۳۴] = \%۹۹$$

$$(-۳/۶۳۴ \le \mu_۱ - \mu_۲ \le ۱۳/۶۳۴)$$

تحلیل. به طور کلی برآورد فاصله‌ای $\mu_۱ - \mu_۲$ براساس علامت عرض برآورد تفسیر می‌شود. به طوری که:

الف) اگر هر دو دامنه مثبت باشد در سطح اطمینان مورد نظر $\mu_۱$ بزرگتر از $\mu_۲$ است.

ب) اگر هر دو دامنه منفی باشد در سطح اطمینان مورد نظر $\mu_۱$ کوچکتر از $\mu_۲$ است.

ج) در غیر این صورت (موارد الف و ب) بین $\mu_۱$ و $\mu_۲$ اختلاف معناداری دیده نمی‌شود. چون تخمین به عمل آمده از نقطهٔ صفر می‌گذرد.

مثال فوق بر مورد ج منطبق است. حد پایین فاصله، LCL، منفی و حد بالای آن، UCL، مثبت است. پس می‌توان گفت در سطح اطمینان ۹۹ درصد بین میانگین عملکرد کارمندان دو سازمان اختلاف معناداری دیده نمی‌شود، بلکه اختلاف مشاهده شده از خطای نمونه گیری ناشی می‌شود.

نکته‌ای که باید به آن توجه کرد این است که هرچه قدر مطلق LCL و UCL در حالتهای «الف و ب» بیشتر باشد از شدت اختلاف $\mu_۱$ و $\mu_۲$ ناشی خواهد بود.

۲ـ۳ـ۱۰ توزیع دو جامعهٔ آماری نرمال و انحراف معیارها نامعلوم

در بیشتر تحقیقات فرض معلوم بودن $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ تقریباً امری نامعقول است؛ زیرا اغلب آنها نامعلوم هستند. بر این اساس، توزیع آمارهٔ $\bar{X}_۱$ و $\bar{X}_۲$ به طور جداگانه نرمال است. پس ترکیب خطی $(\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲)$ آنها نیز دارای توزیع نرمال خواهد بود؛ یعنی اینکه متغیر استاندارد عبارت است از:

$$t = \frac{(\bar{X}_۱ - \bar{X}_۲) - (\mu_۱ - \mu_۲)}{S_{\bar{x}_۱ - \bar{x}_۲}} \qquad (۱۰\text{ـ}۲۴)$$

تعریف $S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ به کیفیت واریانسهای دو جامعه در مقایسه با یکدیگر بستگی دارد. به طوری که اگر «فرض تساوی واریانس دو جامعه، $\sigma_1^2=\sigma_2^2$» پذیرفته شود، می‌توان گفت هردو جامعه درنظر یک جامعه تلقی می‌شوند؛بنابراین واریانس مشترک آنها (σ_p^2) باید براساس S_1^2 و S_2^2 برآورد شود. حال به ادغام واریانس نمونه‌های به دست آمده به این شرح می‌پردازیم:

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \qquad (10\text{-}25)$$

و بنابراین:

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

خواهد بود. با این توصیف متغیر استاندارد در رابطهٔ ۱۰ـ۲۴ به این صورت تغییر خواهد کرد:

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \qquad (10\text{-}26)$$

که درجهٔ آزادی آن $d.f=n_1+n_2-2$ است؛ بنابراین اگر متغیر استاندارد t را در رابطهٔ زیر جایگذاری کنیم:

$$P[-t_{\frac{\alpha}{2},\,d.f}\le t\le t_{\frac{\alpha}{2},\,d.f}]=1-\alpha \qquad (10\text{-}27)$$

تخمین فاصله‌ای چنین به دست می‌آید:

(۱۰ـ۲۸)

$$P\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2},\,d.f}\,.S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2},\,d.f}\,.S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

حال آنکه اگر فرض $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ پدید آید، $S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \qquad (10\text{-}29)$$

به عبارت دیگر از برآورد نقطه‌ای $\sigma_{\bar{x}_1}^2$ و $\sigma_{\bar{x}_2}^2$ استفاده خواهد شد. اگر چه مجدداً توزیع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ از توزیع t برخوردار است ولی به لحاظ تعریف آن را با t' نشان می‌دهیم که عبارت است از:

$$t' = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad (۱۰_۳۰)$$

بر این اساس تخمین فاصله‌ای عبارت خواهد بود از:

(۱۰_۳۱)

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t'_{\frac{\alpha}{2}, d.f'} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t'_{\frac{\alpha}{2}, d.f'} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}] = 1-\alpha$$

که در رابطهٔ ۳۱_۱۰ ، t' دارای درجهٔ آزادی زیر است:

$$d.f' = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{S_1^2}{n_1})^2}{n_1-1}+\frac{(\frac{S_2^2}{n_2})^2}{n_2-1}} \qquad (۱۰_۳۲)$$

واضح است که هم t و هم t' با افزایش حجم نمونه‌ها، n_1 و n_2 ، براساس قضیهٔ حدمرکزی از تقریب Z برخوردار خواهند بود؛ بنابراین چنانچه $d.f = n_1 + n_2 - 2$ دست کم ۳۰ باشد می‌توان از هریک از رابطه‌های ۲۸_۱۰ و ۳۱_۱۰ و یا رابطهٔ عمومی ۳۳_۱۰ برای تخمین فاصله‌ای $\mu_1-\mu_2$ استفاده کرد:

(۱۰_۳۳)

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}] = 1-\alpha$$

مثال ۵_۱۰ هدف از این تحقیق، مقایسهٔ سطح آمادگی کارمندان در سازمان «الف» با سازمان «ب» است. در این تحقیق از سازمان «الف» یک نمونهٔ ۹ نفره انتخاب شده

که میانگین آن ۴۵ و انحراف معیارش ۱۲ است. در حالی که میانگین و انحراف معیار سطح آمادگی کارمندان سازمان «ب» در یک نمونهٔ ۱۵ نفره به ترتیب ۵۵ و ۱۴ می‌باشد. فرض کنید توزیع نمره‌های سطح آمادگی در دو سازمان نرمال و $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ است. در سطح اطمینان ۹۰ درصد تخمین لازم را برای مقایسهٔ میانگین دو جامعه به عمل آورید.

از آنجا که فرض تساوی واریانسها پذیرفته شده است، می‌توان از این فرمول برای تخمین فاصله‌ای $\mu_1-\mu_2$ استفاده کرد:

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm t_{\frac{\alpha}{2}, d.f}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]=1-\alpha$$

$$S_p=\sqrt{\frac{(8)(12)^2+(14)(14)^2}{9+15-2}}=13/31$$

$$\begin{cases}\frac{\alpha}{2}=0/05\\ d.f=n_1+n_2-2=9+15-2=22\end{cases}\Rightarrow t_{0/05, 22}=\pm 1/717$$

$$(45-55)\pm 1/717(13/31\times\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{15}})$$

$$-19/635\leq\mu_1-\mu_2\leq -0/364$$

تحلیل: چون هر دو دامنه منفی است، پس در سطح خطای ۱۰ درصد می‌توان گفت که μ_1 کوچکتر از μ_2 است.

۳-۱۰-۳ توزیع دو جامعهٔ مورد نمونه گیری غیر نرمال

در این حالت با فرض نامعلوم بودن پراکندگی دو جامعه، توزیع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ تحت تأثیر مقدار درجهٔ آزادی است. اگر $d.f>30$ باشد، توزیع آمارهٔ $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ نرمال بوده، می‌توان با استفاده از رابطهٔ ۳۳-۱۰ تخمین لازم را به عمل آورد. در غیر این صورت باید از قاعدهٔ چی‌بی‌شف استفاده کرد که به دلیل کم اهمیت بودن آن در برآورد $\mu_1-\mu_2$ از ذکر آن صرف نظر می‌کنیم.

تمرین

۱. در چه شرایطی پذیرش فرض نرمال برای توزیع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ منطقی است؟

۲. نمونه‌های تصادفی مستقل از هم به حجم n_1 و n_2 از دو جامعهٔ آماری مختلف استخراج شده و این اطلاعات به دست آمده است:

نمونهٔ اول	نمونهٔ دوم
$n_1=100$	$n_2=150$
$\bar{X}_1=40$	$\bar{X}_2=32$
$S_1=13$	$S_2=16$

فاصله‌های اطمینان ۹۹ درصد و ۹۵ درصد را محاسبه و با یکدیگر مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟

۳. هدف یک تحقیق مقایسهٔ هزینه سوخت در فصل زمستان در دو منطقه تهران است. توزیع هزینه سوخت در هر دو منطقهٔ مورد نظر نرمال می‌باشد. در این تحقیق از منطقه اول، ۵ خانوار و از منطقه دوم، ۸ خانوار به طور تصادفی انتخاب شده و هزینه سوخت آنها به این شرح به دست آمده است:

هزینه سوخت منطقه اول	۱۰۰۰	۱۱۰۰	۹۰۰	۸۱۰	۸۵۰			
هزینه‌سوخت منطقه دوم	۵۵۰	۴۵۰	۱۰۰۰	۸۵۰	۳۶۰	۳۵۰	۴۰۰	۴۵۰

الف) با فرض تساوی واریانسهای دو منطقه، میانگین هزینه سوخت را در دو منطقه مقایسه کنید.

ب) با فرض عدم تساوی واریانسهای دو منطقه، میانگین هزینه سوخت را مقایسه کنید.

ج) با مقایسهٔ فواصل به دست آمده در دو حالت چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟ چرا؟

۴ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای نسبت موفقیت جامعه

محققان اغلب از نمونه برای تخمین نسبت موفقیت در جامعهٔ آماری استفاده می‌کنند؛ برای مثال دولتمردان با استفاده از نمونه می‌توانند به نرخ بیکاری یا نسبت افراد شاغل به کل واجدین شرایط کار پی‌ببرند. یک مدیر با استفاده از نمونه می‌تواند درصد افراد راضی از شغل خود را مشخص کند. به طور کلی نسبت موفقیت یکی از مهمترین پارامترهای توصیف مشاهدات با مقیاس اسمی یا رتبه‌ای است. از آنجایی که بسیاری از تحقیقات در مدیریت از مقیاس کیفی برخوردارند، استنباط نسبت موفقیت در جامعهٔ آماری (p) با استفاده از یک نمونهٔ n تایی می‌تواند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار باشد.

از مطالب فصل نهم به خاطر می‌آوریم که برای پارامتر $p=\frac{X}{N}$ آمارهٔ $\bar{p}$ وجود دارد. توزیع نمونه‌گیری $\bar{p}$ در نمونه‌های بزرگ از تقریب نرمال برخوردار است و متغیر استاندارد آن چنین است:

$$Z=\frac{\bar{p}-p}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}} \qquad (10\text{-}34)$$

که در آن $p=\mu_{\bar{p}}$ و $S_{\bar{p}}=\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$ است. حال برای تخمین فاصله‌ای p می‌توان مقدار Z را در رابطهٔ ۳۵ـ۱۰ جایگذاری کرد:

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\leq Z\leq Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \qquad (10\text{-}35)$$

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\leq \frac{\bar{p}-p}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}}\leq Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$$

بر این اساس تخمین فاصله‌ای p چنین به دست می‌آید:

$$P(\bar{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\leq p\leq \bar{p}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}})=1-\alpha \qquad (10\text{-}36)$$

واضح است که عبارت $Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$ همان مقدار $\mathcal{E}$ است که در رابطهٔ $\bar{p}\pm\mathcal{E}$ تعریف خواهد شد.

مثال ۶ـ۱۰ هدف از این تحقیق تعیین نسبت افراد ناراضی در سازمان است. از آنجا که دسترسی به تمام افراد سازمان میسر نیست، محققان ۴۰۰ نفر از کارمندان را به طور تصادفی انتخاب کرده‌اند که فقط ۳۲ نفر از آنها از کار خود ناراضی‌اند. نسبت افراد ناراضی را در سازمان در سطح خطای یک درصد برآورد کنید.

$n=400$

$X=32$

$\bar{p}=\frac{X}{n}=\frac{32}{400}=0/08$

$Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0/005}=\pm 2/58$

بنابراین:

$$\mathcal{E} = ۲/۵۸\sqrt{\frac{۰/۰۸ \times ۰/۹۲}{۴۰۰}} = ۰/۰۳۵$$

پس:

$$P(۰/۰۸ - ۰/۰۳۵ \leq p \leq ۰/۰۸ + ۰/۰۳۵) = \%۹۹$$

$$۰/۰۴۵ \leq p \leq ۰/۱۱۵$$

تحلیل. با اطمینان ۹۹ درصد می‌توان گفت که نسبت افراد ناراضی در سازمان بین ۴/۵ تا ۱۱/۵ درصد کل کارمندان سازمان است. به عبارت دیگر نسبت افراد ناراضی در سازمان با ۹۹ درصد احتمال، حداکثر ۱۱/۵ درصد است.

۵ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای تفاضل نسبت موفقیت در دو جامعه (p_1-p_2)

چنانچه داده‌های جمع‌آوری شده از دو جامعهٔ آماری میانگین‌پذیر[1] باشند، از تخمین فاصله‌ای $\mu_1-\mu_2$ برای مقایسهٔ آنها استفاده می‌شود. ولی چنانچه داده‌ها از نوع کیفی باشند، ناچار از مقایسهٔ نسبت موفقیت دو جامعهٔ آماری استفاده می‌شود. اگر p_1 را نسبت موفقیت در جامعه اول و p_2 را نسبت موفقیت در جامعهٔ دوم بدانیم، $\bar{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ و $\bar{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$ به ترتیب آماره‌های آنها محسوب می‌شوند. حال براساس این مفروضات که:

الف) نمونه‌های تصادفی مستقل از دو جامعهٔ آماری انتخاب می‌شوند؛

ب) دو نمونهٔ تصادفی هر کدام به گونه‌ای معقول بزرگ هستند؛

می‌توان پذیرفت که آمارهٔ $\bar{p}_1-\bar{p}_2$، برآوردکنندهٔ نااریب از p_1-p_2 با کمترین واریانس خواهد بود. ویژگیهای آماره $\bar{p}_1-\bar{p}_2$ عبارتند از:

$$\mu_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \mu_{\bar{p}_1} - \mu_{\bar{p}_2} = p_1 - p_2 \qquad (۱۰\text{ـ}۳۷)$$

$$\sigma^2_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sigma^2_{\bar{p}_1} - \sigma^2_{\bar{p}_2} = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} \qquad (۱۰\text{ـ}۳۸)$$

---

۱. داده‌هایی که از نوع کمّی باشند و یا به عبارت دیگر داده‌هایی که دارای مقیاس نسبی یا فاصله‌ای باشند داده‌های میانگین‌پذیر هستند.

بنابراین می‌توان دریافت که آمارهٔ $\bar{p}_1-\bar{p}_2$ دارای توزیع نرمال است که به این صورت استاندارد می‌شود:

$$Z=\frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} \qquad (۱۰\text{-}۳۹)$$

ولی برای برآورد فاصله‌ای p_1-p_2 ناچار باید یک آمارهٔ نااریب برای $\sigma^2_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}$ تعریف شود که عبارت است از:

$$S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}=\sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}} \qquad (۱۰\text{-}۴۰)$$

حال متغیر استاندارد را با استفاده از $S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}$ تعریف می‌کنیم:

$$Z=\frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}} \qquad (۱۰\text{-}۴۱)$$

بدین ترتیب برآورد فاصله‌ای p_1-p_2 که عبارت است از:

$$(\bar{p}_1-\bar{p}_2)\pm\mathcal{E} \qquad (۱۰\text{-}۴۲)$$

در سطح اطمینان $(1-\alpha)100$ درصد به این صورت تعریف می‌شود:

(۱۰-۴۳)

$$P[(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}\le p_1-p_2\le(\bar{p}_1-\bar{p}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot S_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}]=1-\alpha$$

مثال ۱۰-۷ تحقیقی در ارتباط با مقایسهٔ درصد مدیران برخوردار از سبک S_1 در سازمانهای دولتی با مدیران سازمانهای خصوصی برنامه‌ریزی شده و بدین منظور از میان مدیران دولتی یک نمونهٔ ۵۰۰ تایی و از مدیران خصوصی یک نمونهٔ ۴۰۰ تایی انتخاب شده است. ۱۰۰ نفر از مدیران دولتی و ۵۰ نفر از مدیران سازمانهای خصوصی دارای سبک S_1 هستند. با در نظر گرفتن سطح اطمینان ۹۵ درصد نسبت واقعی مدیران برخوردار از سبک S_1 را در دو جامعه آماری مقایسه کنید.

سازمانهای خصوصی	سازمانهای دولتی
$n_2 = 400$	$n_1 = 500$
$X_2 = 50$	$X_1 = 100$
$\bar{p}_2 = \frac{50}{400} = 0/125$	$\bar{p}_1 = \frac{100}{500} = 0/20$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0/025} = \pm 1/96$$

بنابراین، براساس رابطهٔ ۱۰ـ۴۳ تخمین فاصله‌ای $p_1 - p_2$ عبارت است از:

$$P[(0/20 - 0/125) \pm 1/96\sqrt{\frac{0/20(0/80)}{500} + \frac{(0/125)(0/875)}{400}}] = 0/95$$

$$(0/027 \le p_1 - p_2 \le 0/123)$$

تحلیل. چون هر دو دامنهٔ عرض برآورد تفاضل p_1 و p_2 مثبت است، پس در سطح اطمینان ۹۵ درصد نسبت واقعی مدیران برخوردار از سبک S_1 در سازمانهای دولتی بیشتر از نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 در سازمانهای خصوصی است.

تمرین

۱. از میان دارندگان مدرک دیپلم یک نمونهٔ تصادفی ۴۰۰ تایی انتخاب شده‌است که ۳۰ نفر از آنها بیکارند. در سطح اطمینان ۹۰ درصد نسبت واقعی افراد بیکار را در میان دارندگان مدرک دیپلم برآورد کنید. اگر کل جامعهٔ مورد نظر یک میلیون نفر باشد، تعداد بیکارهای آنها در سطح خطای یک درصد چقدر است؟

۲. مدیر کنترل کیفیت کارخانهٔ تولید لامپ درصدد مقایسه درصد ضایعات کارخانهٔ خود با کارخانهٔ مشابه است. در این زمینه از تولیدات کارخانه خود یک نمونهٔ تصادفی ۲ هزار واحدی انتخاب کرده که ۲۰۰ واحد آن سوخته است، در حالی که از میان هزار لامپ انتخاب شده از کارخانهٔ مشابه ۱۵۰ لامپ سوخته دیده می‌شود. در سطح اطمینان ۹۵ درصد ضایعات را در دو کارخانه مقایسه کنید و توضیح دهید مدیر کنترل کیفیت چه نتیجه‌ای خواهد گرفت؟

۳. آیا می‌توان برای $S_{\bar{p}1-\bar{p}2}$ در رابطهٔ ۱۰ـ۴۰ فرمول دیگری نوشت؟ در صورتی که جواب مثبت است، آن را بنویسید و دلایل توجیهی را قید کنید.

۶-۱۰ تعیین اندازه نمونه

در صدر برنامه‌ریزی هر مطالعه یا تحقیقی این سؤال که اندازه نمونه چقدر باشد، قرار دارد. سؤال فوق موضوع مهمی است که هرگز نباید آن را کوچک شمرد. انتخاب نمونه‌ای بزرگتر از حد نیاز برای حصول نتایج مورد نظر سبب اتلاف منابع می‌شود، در حالی که انتخاب نمونه‌های خیلی کوچک اغلب، پژوهشگر را به نتایجی سوق می‌دهند که فاقد استفاده عملی است. از این رو در این بخش چگونگی تعیین اندازه نمونه مورد نیاز، بررسی خواهد شد. فرمول تعیین اندازه نمونه به نوع نیاز بستگی دارد. به طور کلی فرمولهای اندازه نمونه به مقیاس داده‌ها مربوطند که ما آنها را برحسب کمّی و کیفی تقسیم و به کمک تخمین میانگین و نسبت موفقیت، روشهایی برای تعیین اندازه نمونه ارائه خواهیم کرد.

۱-۶-۱۰ تعیین اندازه نمونه برای تخمین میانگین جامعه (μ_x)

داده‌هایی که دارای مقیاس نسبی و فاصله‌ای هستند از نوع داده‌های میانگین‌پذیرند. در این نوع داده‌ها برای تعیین اندازه نمونه از تخمین فاصله‌ای میانگین استفاده می‌شود؛ یعنی:

$$\bar{X} \pm \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}} \qquad (10\text{-}44)$$

$$\mathcal{E} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \qquad (10\text{-}45)$$

چون تمام عرض حدود اطمینان دو برابر این مقدار است اگر ضریب انحراف استاندارد مقداری ثابت در نظر گرفته شود، تنها راهی که برای کم کردن عرض حدود می‌ماند، این است که انحراف استاندارد را کاهش دهیم؛ از این رو چون انحراف معیار $\bar{X}$ برابر $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ است و σ_x عدد ثابتی است، تنها راه دستیابی به انحراف معیار کوچکتر این است که نمونه بزرگتری انتخاب شود. اما این نمونه تا چه اندازه باید بزرگ باشد؟ بزرگی اندازه نمونه به مقدار σ_x، سطح اطمینان و عرض مطلوب حدود اطمینان بستگی دارد.

هنگامی که نمونه گیری با جایگذاری از یک جامعهٔ محدود و یا نمونه گیری بدون جایگذاری از یک جامعه نامحدود انجام گیرد ـ به نحوی که اغماض اصلاح جامعهٔ

محدود را تضمین کند ـ در این صورت اگر معادله ۱۰ـ۴۵ برحسب مجهول n حل شود، خواهیم داشت:

$$n = \frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_x^2}{\mathcal{E}^2} \qquad (۱۰\text{ـ}۴۶)$$

هرگاه نمونه‌برداری بدون جایگذاری از یک جامعهٔ محدود انجام شود، اصلاح جمعیت محدود لازم می‌آید. در نتیجه مقدار $\mathcal{E}$ با عامل تصحیح $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ باید تعریف شود؛ یعنی:

$$\mathcal{E} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad (۱۰\text{ـ}۴۷)$$

که وقتی برای n حل شود، به این صورت درمی‌آید:

$$n = \frac{N \ Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_x^2}{\mathcal{E}^2(N-1)+Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_x^2} \qquad (۱۰\text{ـ}۴۸)$$

اگر بتوان از اصلاح جمعیت محدود صرف نظر کرد، معادله ۱۰ـ۴۸ به ۱۰ـ۴۶ تقلیل می‌یابد.

آگاهی از مقدار σ_x^2 برای استفاده از فرمولهای بالا، به منظور تعیین اندازه نمونه ضروری است. ولی چنانکه پیش از این نیز یادآوری شد، انحراف معیار جامعه قاعدتاً برای تخمین μ_x نامعلوم است. در نتیجه σ_x^2 را باید برآورد کرد. معمولترین روشهای برآورد σ_x^2 عبارتند از:

۱. می‌توان نمونهٔ مقدماتی را از جامعهٔ آماری انتخاب کرده، با استفاده از آن انحراف معیار جامعه را محاسبه کرد و به عنوان برآورد σ_x^2 به کار برد. مشاهداتی را که در نمونهٔ مقدماتی به کار می‌روند می‌توان به صورت بخشی از نمونه نهایی شمرد، به طوری که:

$$n_1 = (\text{اندازه نمونه مقدماتی}) - n\ (\text{اندازه نمونه محاسبه شده}) \qquad (۱۰\text{ـ}۴۹)$$

$$n_2\ (\text{تعداد مشاهدات لازم که برای تکمیل نمونه لازم است})$$

۲. ممکن است برآوردهای σ_x^2 از مطالعهٔ مشابه در دسترس باشد.

۳. اگر شواهدی وجود داشته باشد که جامعه مورد نمونه گیری به طور تقریبی از

توزیع نرمال برخوردار است، می‌توان این حقیقت را به کار برد که عرض دامنه، تقریباً معادل ٤ یا ٦ انحراف معیار است و $\sigma_x \simeq \frac{R}{٤}$ یا $\sigma_x \simeq \frac{R}{٦}$ خواهد بود. R دامنه تغییرات است که محاسبهٔ آن مستلزم در دسترس بودن کوچکترین و بزرگترین مقدار متغیر در جامعهٔ آماری است.

مثال ۸ـ۱۰ یکی از محققان مدیریت مایل است، مطالعه‌ای به منظور تعیین میانگین رشد کاری کارمندان سازمانی انجام دهد. در این مطالعه او دقت برآورد را ۵ نمره در نظر گرفته و تصور می‌کند که انحراف معیار نمره‌های رشد کاری کارمندان ۲۰ نمره باشد، اندازه نمونه لازم را برای بررسی نهایی در سطح خطای ۵ درصد محاسبه کنید.

چون اشاره‌ای به تعداد عناصر جامعهٔ آماری نشده است، نمونه گیری از جامعهٔ نامحدود فرض شده و حجم نمونه با استفاده از رابطه ٤٦ـ۱۰ محاسبه می‌شود:

$$n = \frac{(۱/۹۶)^۲(۲۰)^۲}{(۵)^۲} = ۶۱/۵$$

محقق مذکور باید ٦۲ نفر را به عنوان نمونه در بررسی خود انتخاب کند.

نامعلوم بودن انحراف معیار جامعه موجب می‌شود که اگر $n \leq ۳۰$ باشد، توزیع $\bar{X}$ یک توزیع t استیودنت شود. حال آنکه روابط ٤٦ـ۱۰ و ٤٨ـ۱۰ بر فرض نرمال بودن توزیع $\bar{X}$ بنا شده‌اند. پس اگر $\bar{X}$ دارای توزیع t باشد باید n براساس رابطهٔ:

$$n = \left(\frac{t_{\frac{\alpha}{۲}, d.f}\ \sigma_{\circ}}{\varepsilon}\right)^۲ \qquad (۱۰\text{-}۵۰)$$

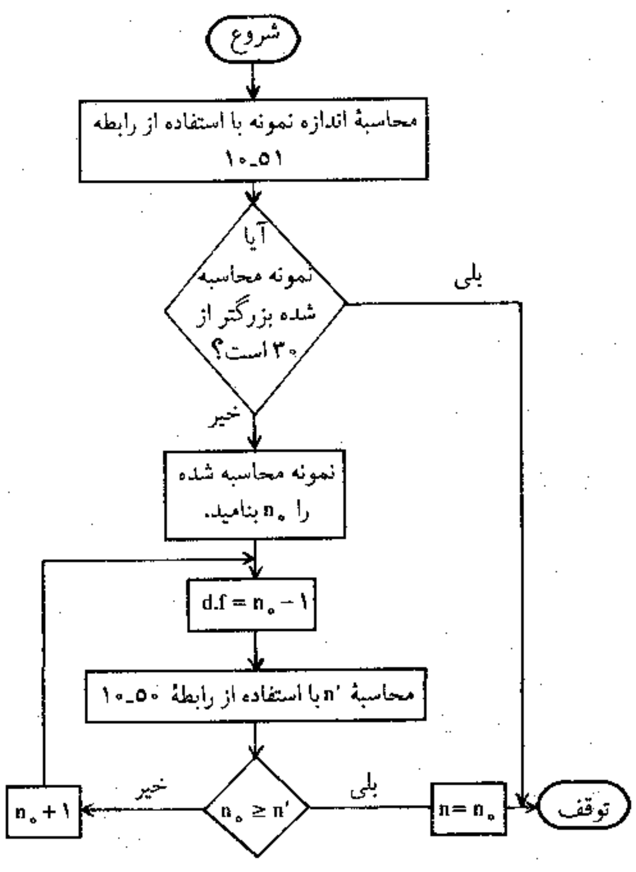
تعیین شود که در آن $\sigma_{\circ}$ برآوردی از انحراف معیار واقعی جامعهٔ آماری است. از آنجا که مجهول n تحت تأثیر درجه آزادی $(d.f = n-۱)$ است پس فرمول محاسبهٔ n در یک دور قرار می‌گیرد که با استفاده از رابطهٔ توزیع Z و t باید به این دور پایان داد.

نظر به اینکه رابطهٔ $Z_{\frac{\alpha}{۲}} \leq t_{\frac{\alpha}{۲}, d.f}$ برقرار است، یک تخمین مقدماتی برای n عبارت است از:

$$n \geq \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{۲}}\sigma_{\circ}}{\varepsilon}\right)^۲ \qquad (۱۰\text{-}۵۱)$$

به ازای مقادیر بزرگ n (مثلاً: $n \geq ۵۰$)، $Z_{\frac{\alpha}{۲}} \simeq t_{\frac{\alpha}{۲}, d.f}$ است. درمواردی که n

بزرگ است، استفاده از نامساوی ۱۰ـ۵۱ ضرورتی ندارد؛ ولی در نمونه‌های کوچک باید به اندازهٔ مابه‌التفاوت رابطه‌های ۱۰ـ۵۰ و ۱۰ـ۵۱ دوباره نمونه انتخاب کرد. حال فلوچارت محاسبهٔ تعداد نمونه را با استفاده از توزیع t استیودنت در شکل ۱۰ـ۵ نشان می‌دهیم:



شکل ۱۰ـ۵ فلوچارت محاسبهٔ نمونهٔ کوچک با استفاده از رابطهٔ Z و t

مثال ۱۰ـ۹ بررسیهای مقدماتی حاصل از ٤ مشتری نشان می‌دهد که انحراف معیار زمان اشتغال یک فروشنده در مغازه‌ای ۰/۰۷۲ است. هدف از این تحقیق، تخمین درصد زمان اشتغال فروشنده با دقت ۰/۰٤± و با احتمال ۹۵ درصد است. حجم نمونه مورد نظر را برآورد کنید.

ابتدا با استفاده از رابطهٔ ۱۰ـ۵۱ به محاسبه n می‌پردازیم:

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_\circ}{\mathcal{E}}\right)^2 = \left(\frac{1/96 \times 0/072}{0/04}\right)^2 = 12/44$$

چون $n<30$ است و σ_x جامعه هم نامعلوم است، پس آن را $n_\circ$ نامیده، براساس فلوچارت شکل ۵ـ۱۰ برای تعیین نمونه واقعی اقدام می‌کنیم. حاصل عملیات فلوچارت در جدول ۲ـ۱۰ آمده است:

جدول ۲ـ۱۰ محاسبهٔ نمونهٔ کوچک برای مثال ۹ـ۱۰

$n_\circ$	۱۳	۱۴	۱۵
$t_{0/025,\,d.f}$	۲/۱۸	۲/۱۶	۲/۱۴
$\left(\frac{t_{0/025,\,d.f}\,\sigma_\circ}{\mathcal{E}}\right)^2$	۱۵/۳۹	۱۵/۱۰	۱۴/۸۳

عدد ۱۲/۴۴ را به ۱۳ گرد کرده، آن را به عنوان اولین $n_\circ$ در نظر می‌گیریم. این مقدار به عنوان ملاک محاسبهٔ درجهٔ آزادی قرار گرفته، با استفاده از رابطهٔ ۱۰ـ۵۰ حجم نمونهٔ ۱۵/۳۹ به دست می‌آید. چون هنوز رابطه $n_\circ \geq n'$ برقرار نشده است یکی به ۱۳ اضافه کرده، مجدداً فلوچارت را تکرار می‌کنیم، سرانجام $n_\circ = 15$ بزرگتر از $n' = 14/83$ شده، فلوچارت به مرحلهٔ توقف می‌رسد؛ بنابراین حجم نمونه مساوی ۱۵ می‌شود.

در تمام روابط فوق فرض نرمال بودن جامعهٔ آماری یک فرض اساسی است؛ بنابراین حجم نمونه یا براساس Z و یا t به دست می‌آید. در صورتی که نرمال بودن توزیع $\bar{X}$ و یا برخورداری آن از توزیع t استیودنت بر ما معلوم نباشد، می‌توان به کمک قضیهٔ چی‌بی‌شف به راه حلی محافظه کارانه دست یافت؛ داریم:

$$P[|\bar{X} - \mu_x| \leq d] = 1 - \frac{\sigma_{\bar{X}}^2}{\mathcal{E}^2} = 1 - \frac{\sigma_x^2}{n\mathcal{E}^2} \qquad (10\text{-}52)$$

$\left(1 - \frac{\sigma_x^2}{n\mathcal{E}^2}\right)$ را با سطح اطمینان $1 - \alpha$ مساوی قرار می‌دهیم و حجم نمونه به این

صورت به دست می‌آید:

$$1 - \frac{\sigma_x^2}{n\mathcal{E}^2} = 1 - \alpha \Rightarrow \sigma_x^2 = \alpha n \mathcal{E}^2$$

$$n = \frac{\sigma_x^2}{\alpha \mathcal{E}^2} \qquad (10\text{-}53)$$

۲-۶-۱۰ تعیین اندازه نمونه برای تخمین نسبت موفقیت

روش تعیین اندازه نمونه، در صورتی که قرار باشد نسبت موفقیت را برآورد کنیم، اصولاً با همان شیوه‌ای که قبلاً به منظور تخمین میانگین جامعه توضیح داده شد دنبال می‌شود، و از رابطهٔ $\bar{p} \pm \mathcal{E}$ می‌توان بهره‌برداری کرد؛ با این فرض که نمونه گیری از جامعه به طور تصادفی صورت می‌گیرد و توزیع $\bar{p}$ از توزیع نرمال برخوردار است. از فرمولهای ۱۰-۵٤ و ۱۰-۵۵ در صورتی استفاده می‌شود که نمونه گیری با جایگذاری از جامعهٔ محدود صورت گیرد و یا جامعهٔ مورد نظر به حد کافی بزرگ باشد که بتوان استفاده از اصلاح جامعهٔ محدود را غیرلازم شمرد.

$$\mathcal{E} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad (10\text{-}54)$$

حال رابطه برحسب مجهول n مرتب می‌شود:

$$n = \frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\ p(1-p)}{\mathcal{E}^2} \qquad (10\text{-}55)$$

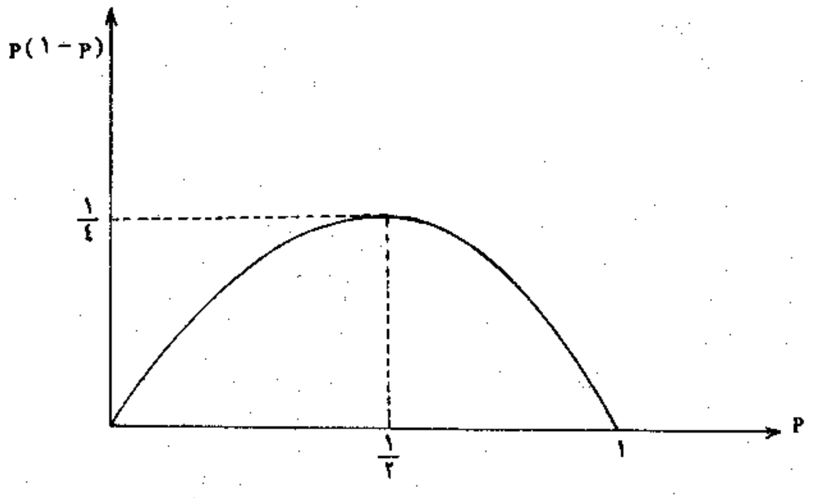
اگر اصلاح جامعهٔ محدود را نتوان نادیده گرفت، در آن صورت فرمول مناسب برای n چنین خواهد شد:

$$n = \frac{N Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\ p(1-p)}{\mathcal{E}^2(N-1) + Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\ p(1-p)} \qquad (10\text{-}56)$$

در صورتی که N نسبت به n بزرگ باشد (یعنی $\frac{n}{N} \leq 0/05$) اصلاح جامعهٔ محدود را می‌توان نادیده گرفت.

چنانکه مشاهده می‌شود، آگاهی از p- که ویژگی موردنظر را دارد ـ در هر دو

فرمول لازم است. برای رفع این مشکل یکی از راه‌حلهای مسأله این است که نمونه‌ای مقدماتی انتخاب گردیده، برآوردی که به جای p در فرمول n به کار می‌رود، محاسبه شود. گاهی پژوهشگر تصوری از یکی از حدود بالایی p دارد که می‌توان آن را در فرمول به کار برد؛ برای مثال ممکن است بزرگترین مقدار p، ٦۰ درصد باشد. از این رو به جای p در فرمول محاسبهٔ n مقدار ٦۰ درصد قرارمی‌گیرد. اگر پژوهشگر نتواند به برآورد بهتری برای p دست یابد، می‌تواند آن را مساوی ۵۰ درصد گرفته و n را محاسبه کند. چون اگر $p = \frac{1}{2}$ در فرمول بالا گذاشته شود، n حداکثر مقدار ممکن خود را پیدا خواهد کرد. این خاصیت در شکل ٦ـ۱۰ بخوبی دیده می‌شود.



شکل ٦.۱۰ مقادیر $p(1-p)$ در تعیین اندازه نمونه

استفاده از این شیوه سبب می‌شود که نمونه به حد کافی بزرگ باشد. در عین حال این نمونه ممکن است بزرگتر از حد نیاز باشد و گرانتر از زمانی تمام شود که برآورد بهتری از p در دسترس قرار دارد. این شیوه را تنها زمانی به کار می‌برند که پژوهشگر قادر نیست به برآورد بهتری از p دسترسی پیدا کرد.

مثال ۱۰ـ۱۰ مطالعه‌ای برای تعیین نسبت مدیران وظیفه‌مدار در سطح سازمانهای دولتی کشور برنامه‌ریزی شده است. این تصور وجود دارد که نسبت مزبور بزرگتر از ۰/٤۵ نیست. حدود اطمینان ۹۵ درصد با $\mathcal{E} = \pm$ ۰/۰۸ مورد نظر است. چند مدیر برای این مطالعه باید انتخاب شوند؟

با فرض نامحدود بودن جامعه از رابطهٔ ۵۵ـ۱۰ برای تعیین اندازه نمونه استفاده می‌شود:

$$n = \frac{(۱/۹۶)^{۲}(۰/۴۵)(۰/۵۵)}{(۰/۰۸)^{۲}} = ۱۴۸/۶$$

بنابراین اندازه نمونه مورد نیاز، ۱۴۹ مدیر است.

تمرین

۱. مدیر کنترل کیفی کارخانه‌ای درصدد برآورد میانگین وزن محصولات تولید شده کارخانه است. او در این زمینه یک نمونهٔ مقدماتی انتخاب کرده که میانگین آن ۵۰ گرم و انحراف معیارش ۱۲ گرم است. اگر دقت برآورد ۱۴± گرم در نظر باشد، حجم نمونه مناسب را برآورد کنید (۱٪ = α).

۲. تحقیقی برای تعیین شاخص انعطاف‌پذیری در یک سازمان باید انجام گیرد. کل جامعهٔ آماری شامل ۲ هزار مدیر است. بررسیهای یک نمونه مقدماتی نشان می‌دهد که پراکندگی انعطاف‌پذیری در این سازمان ۱۲ می‌باشد. اگر دقت برآورد ۱۰ نمره باشد، حجم نمونه را با فرض محدود بودن جامعه در سطح خطای ۵ درصد تعیین کنید.

۳. برای برآورد نسبت آن عده از صاحبان اتومبیل که ماشین خود را به مبلغی بیش از یک مقدار معین بیمه کرده‌اند، نمونه‌ای تصادفی مرکب از ۴۰۰ صاحب اتومبیل برگزیده شده است. اگر حق بیمهٔ اتومبیل ۵۶ نفر از آنها بیش از این مقدار معین باشد:

الف) یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای نسبتی که برآورد می‌شود، محاسبه کنید.

ب) چه حجمی برای نمونه باید اختیار شود تا حد بالای فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برابر با ۰/۱۸ باشد؟

۴. مدیر شرکت «الف» در نظر دارد، شرکت «ب» را که سماور برقی تولید می‌کند، خریداری کند. شرکت «ب» ادعا می‌کند که ۳۰ درصد کل بازار سماور برقی را در اختیار دارد. مدیر شرکت بزرگ «الف» می‌خواهد به وسیلهٔ نمونه گیری صحت این ادعا را بررسی کند. اگر مدیر شرکت «الف» بخواهد سهم شرکت «ب» را تا ۰/۰۲۵± اختلاف با ۹۸ درصد اطمینان برآورد کند. حجم نمونه انتخابی چقدر باید باشد؟

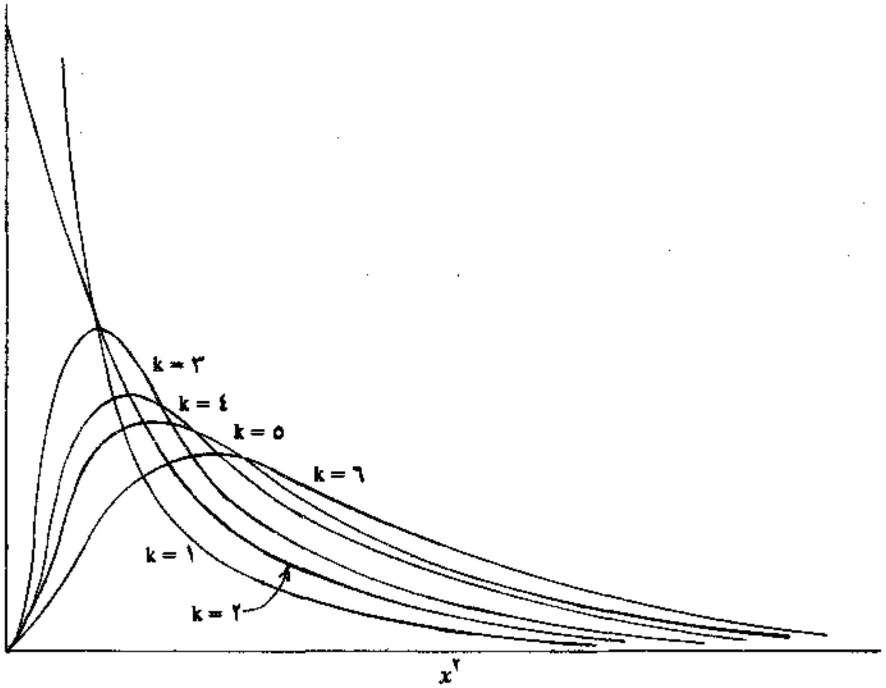
۷ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای واریانس جامعه (σ_x^2)

در بسیاری از تحقیقات، واریانس جامعه سؤال قرار می‌گیرد. می‌دانیم که S_x^2 واریانس نمونه و برآورد نقطه‌ای واریانس جامعه است. حال که برآورد نقطه‌ای σ_x^2 در دسترس قرار دارد، منطقی است که حدود اطمینان را برای واریانس جامعه تعیین کنیم. موفقیت در تعیین حدود اطمینان برای واریانس جامعه به میزان توانایی ما در دسترسی به یک توزیع نمونه گیری مناسب بستگی خواهد داشت.

معمولاً حدود اطمینان برای σ_x^2 بر مبنای توزیع نمونه گیری $\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2}$ قرار دارد،

اگر نمونه‌ای n تایی از جامعهٔ برخوردار از توزیع نرمال انتخاب شود، مقدار مزبور از توزیعی موسوم به «توزیع کای ـ مربع»[1] با ۱−n درجهٔ آزادی برخوردار است. در فصل پانزدهم دربارهٔ این توزیع به طور مفصل بحث خواهد شد. در اینجا فقط این نکته بازگو می‌شود که $\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2}$ از توزیع کای ـ مربع پیروی می‌کند و وقتی که فرض برخورداری جامعه از توزیع نرمال حاصل آید، تعیین حدود اطمینان برای σ_x^2 مفید خواهد بود.

در شکل ۷ـ۱۰ تعدادی توزیع کای ـ مربع برای چندین مقدار درجهٔ آزادی نشان داده شده، همچنین درصدهای توزیع کای ـ مربع که با حرف یونانی χ^2 نشان داده می‌شود در جدول ٤ پیوست ارائه شده است. عناوین سطری نشان‌دهنده درجهٔ آزادی و عناوین ستونی نشان‌دهنده درصد خطا (α) است. مقادیر کای ـ مربع با توجه به درجهٔ آزادی و دنبالهٔ سمت راست توزیع به دست خواهند آمد.



شکل ۷ـ۱۰ توزیعهای کای ـ مربع برای مقادیر مختلف درجه‌های آزادی

1. chi-square distribution

بیان شد که

$$\chi^{2}=\frac{(n-1)\,S_x^{2}}{\sigma_x^{2}} \qquad (۱۰\text{-}۵۷)$$

پس باید:

$$P[\chi^{2}_{1-\frac{\alpha}{2},\,d.f}\le\chi^{2}\le\chi^{2}_{\frac{\alpha}{2},\,d.f}]=1-\alpha \qquad (۱۰\text{-}۵۸)$$

حال مقدار χ^2را در رابطهٔ ۵۸ـ۱۰ تعریف کرده، آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$P[\chi^{2}_{1-\frac{\alpha}{2},\,d.f}\le\frac{(n-1)\,S_x^{2}}{\sigma_x^{2}}\le\chi^{2}_{\frac{\alpha}{2},\,d.f}]=1-\alpha \qquad (۱۰\text{-}۵۹)$$

رابطهٔ ۵۹ـ۱۰ باید به گونه‌ای مرتب شود که تنها نشان‌دهندهٔ سطح اطمینان σ_x^2 باشد. اگر رابطه مذکور را بر $(n-1)\,S_x^2$ تقسیم و آن را معکوس کنیم رابطهٔ ۶۰ـ۱۰ حاصل می‌شود:

$$P[\frac{(n-1)\,S_x^{2}}{\chi^{2}_{\frac{\alpha}{2},\,d.f}}\le\sigma_x^{2}\le\frac{(n-1)\,S_x^{2}}{\chi^{2}_{1-\frac{\alpha}{2},\,d.f}}]=1-\alpha \qquad (۱۰\text{-}۶۰)$$

رابطهٔ ۶۰ـ۱۰ حدود اطمینان $(1-\alpha)100$ درصد برای σ_x^2 خواهد بود. اگر از هریک از جملات نامساوی فوق جذر بگیریم، حدود اطمینان برای σ_x نیز به دست خواهد آمد.

مثال ۱۱ـ۱۰ یکی از کارگزاران بازار بورس تهران درصدد تعیین ریسک شرکتهایی است که سهام خود را عرضه می‌کنند. در این زمینه یک نمونهٔ تصادفی ۱۵ تایی از بین شرکتها انتخاب کرده که میانگین و واریانس سود سالانه آنها به ترتیب ۲۵ هزار و ۱۲۲۵ است. توزیع سود سالانه شرکتها از تقریب نرمال برخوردار است. در سطح خطای ۵ درصد، حدود اطمینان ریسک شرکتها را به دست آورید.

ملاک ریسک، پراکندگی سود است. پس باید حدود اطمینان σ_x را برای کل شرکتهای عرضه کننده سهام پیدا کرد. چون توزیع آمارهٔ S_x^2 مشخص است ابتدا σ_x^2 را

برآورد کرده، سپس از آن جذر می‌گیریم تا نتیجهٔ مطلوب حاصل شود.

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{۲} = ۰/۰۲۵ \\ d.f = n - ۱ = ۱۵ - ۱ = ۱٤ \end{cases} \Rightarrow \chi^{۲}_{۰/۰۲۵,۱٤} = ۲٦/۱۱۹$$

و:

$$\chi^{۲}_{۰/۹۷۵,۱٤} = ۵/٦۲۹$$

حال براساس رابطهٔ ٦۰ـ۱۰ برآورد فاصله‌ای $\sigma_x^۲$ عبارت است از:

$$P\left[\frac{(۱٤)(۱۲۲۵)}{۲٦/۱۱۹} \leq \sigma_x^۲ \leq \frac{(۱٤)(۱۲۲۵)}{۵/٦۲۹}\right] = ۰/۹۵$$

$$(٦۵٦/٦۱ \leq \sigma_x^۲ \leq ۳۰٤٦/۷۲)$$

و:

$$(۲۵/٦۲ \leq \sigma_x \leq ۵۵/۲۰)$$

تحلیل. با ۹۵ درصد اطمینان می‌توان گفت که ریسک سودآوری شرکتهای عرضه کننده سهام در بازار بورس تهران بین ۲۵/٦۲ تا ۵۵/۲۰ قرار دارد؛ زیرا در نمونه گیریهای مکرر ۹۵ درصد، فاصله‌های برآورد شده، پارامتر مربوط را دربرخواهند داشت.

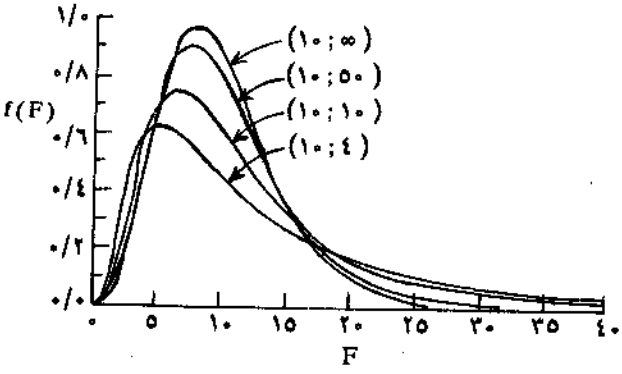
۸ـ۱۰ تخمین فاصله‌ای نسبت واریانس دو جامعه آماری $(\frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۲^۲})$

در مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری تنها به میانگینها و نسبتها اکتفا نمی‌شود. مقایسهٔ دو واریانس بارها مد نظر بوده و یکی از راههای انجام دادن چنین مقایسه‌ای تشکیل نسبت آنها یعنی $(\frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۲^۲})$ است. اگر دو واریانس با هم مساوی باشند، نسبت آنها مساوی یک خواهد بود.

واریانسهای دو جامعه معمولاً معلوم نیستند. در نتیجه هر گونه مقایسه‌ای بر مبنای واریانسهای نمونه قرار می‌گیرد؛ بنابراین برای مقایسهٔ دو واریانس جامعه، چاره‌ای

نیست جز آنکه از آماره‌ها و توزیع نمونه‌گیری آنها استفاده شود. این بار از توزیع $(\frac{S_2^2}{\sigma_2^2})/(\frac{S_1^2}{\sigma_1^2})$ تحت شرایط و مفروضاتی استفاده می‌شود. این مفروضات به ترتیب عبارتند از S_1^2 و S_2^2 از نمونه‌های مستقل از هم با اندازه‌های n_1 و n_2 که از دو جامعه برخوردارازتوزیع نرمال محاسبه می‌شوند. اگر مفروضات مذکور تأمین شوند، آمارهٔ $(\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}) / (\frac{S_1^2}{\sigma_1^2})$ از توزیعی موسوم به توزیع F برخوردار خواهد بود. توزیع F دو درجهٔ آزادی بستگی دارد: یکی به مقدار (n_1-1) که در محاسبهٔ S_1^2 به کار می‌رود و دیگری به مقدار (n_2-1) در محاسبهٔ S_2^2 به کار گرفته می‌شود. معمولاً این دو به ترتیب درجهٔ آزادی صورت و درجهٔ آزادی مخرج معروفند.

شکل ۸-۱۰ توزیع F را برای چندین درجهٔ آزادی صورت و مخرج نشان می‌دهد. جدول ۵ پیوست برای مقادیر معین درجه‌های آزادی و α مقادیر F را که در دنباله راست آن $\frac{\alpha}{2}$ سطح زیر منحنی F قرار دارد، تدارک دیده شده‌است.



شکل ۸-۱۰ توزیع F برای درجه‌های آزادی مختلف

تعیین حدود اطمینان برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ را با متغیر استاندارد F شروع خواهیم کرد که چنین تعریف می‌شود:

$$F=\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}=\frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} \qquad (۱۰\text{-}۶۱)$$

حال حدود اطمینان را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$P[F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2} \leq F \leq F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}] = 1-\alpha \qquad (10\text{-}62)$$

که در آن $d.f_1 = n_1 - 1$ و $d.f_2 = n_2 - 1$ بوده، ترتیب نوشتن آنها از چپ به راست نشان‌دهنده درجه‌های آزادی صورت و مخرج است. حال فرمول ۱۰ـ۶۱ را در رابطهٔ ۱۰ـ۶۲ جایگذاری می‌کنیم؛ بدین ترتیب رابطهٔ ۱۰ـ۶۳ به دست می‌آید که مبنای تخمین فاصله‌ای نسبت دو واریانس خواهد بود:

$$P[F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2} \leq \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} \leq F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}] = 1-\alpha \qquad (10\text{-}63)$$

رابطهٔ فوق را باید به گونه‌ای مرتب کرد که تخمین، نشان‌دهنده $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ باشد. حال عملیات ریاضی در رابطهٔ ۶۴–۱۰ دیده می‌شود:

$$P[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2}}] = 1-\alpha \qquad (10\text{-}64)$$

برای پیدا کردن $F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}$ می‌توان از جدول ۵ پیوست استفاده کرد؛ ولی برای پیدا کردن $F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2}$ باید قاعدهٔ ذیل را به کار گرفت:

«ابتدا جای درجه‌های آزادی صورت و مخرج را با هم عوض کرده و مقدار متناسب F را با توجه به $\frac{\alpha}{2}$ در جدول مذکور پیدا کنید. مقدار حاصل $F_{\frac{\alpha}{2},d.f_2,d.f_1}$ خواهد بود»؛ بنابراین می‌توانید برای به دست آوردن $F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2}$ از رابطه ۱۰ـ۶۵ استفاده کنید:

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2}),d.f_1,d.f_2} = \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},d.f_2,d.f_1}} \qquad (10\text{-}65)$$

پس رابطهٔ ۱۰ـ۶۴ باید به این صورت تغییر کند:

$$P\left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2},d.f_1,d.f_2}\right] = 1-\alpha \qquad (10\text{-}66)$$

رابطهٔ ۱۰ـ۶۶ ملاک تخمین فاصله‌ای نسبت واریانس دو جامعه است.

مثال ۱۰ـ۱۲ هدف از این تحقیق مقایسهٔ پراکندگی نمره‌های دانشجویان در دو دانشکده «الف و ب» است. در این تحقیق از دانشکدهٔ «الف» یک نمونهٔ تصادفی ۱۶ تایی انتخاب شده که میانگین آن ۱۴ و واریانس آن ۱۶ است. در حالی‌که میانگین و واریانس یک نمونهٔ تصادفی ۱۰ تایی از دانشجویان دانشکدهٔ «ب» به ترتیب ۱۵ و ۱۲ بوده است. در سطح اطمینان ۹۰ درصد، پراکندگی نمره‌ها را در دو دانشکده مقایسه کنید.

$$\begin{cases} d.f_1 = n_1 - 1 = 16 - 1 = 15 \\ d.f_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9 \\ \frac{\alpha}{2} = \frac{0/10}{2} = 0/05 \end{cases}$$

بنابراین:

$$F_{0/05,15,9} = 3/01$$

$$F_{0/05,9,15} = 2/59$$

$$P\left[\frac{\frac{16}{12}}{3/01} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{16}{12}2/59\right] = 0/90$$

$$\left(0/443 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 3/453\right)$$

تحلیل. به طور کلی تحلیل فاصلهٔ اطمینان نسبت واریانس در یکی از این موارد امکانپذیر است:

الف) اگر هر دو دامنه؛ UCL و LCL، بزرگتر از یک باشد در سطح اطمینان

مورد نظر، می‌توان گفت σ_1^2 بزرگتر از σ_2^2 است.

ب) اگر UCL و LCL هر دو کوچکتر از یک باشد در سطح اطمینان مورد نظر می‌توان گفت، σ_1^2 کوچکتر از σ_2^2 است.

ج) در حالتی غیر از موارد «الف و ب»؛ یعنی در حالتی که فاصلهٔ به دست آمده دربرگیرندهٔ یک است نمی‌توان ادعا کرد، تفاوت معناداری بین واریانس دو جامعه وجود دارد.

بنابراین چون فاصلهٔ به دست آمده در مثال ۱۲-۱۰، دربرگیرندهٔ یک است، نمی‌توان گفت در سطح اطمینان ۹۰ درصد، اختلاف معناداری بین پراکندگی نمره‌های دانشجویان دو دانشکده وجود دارد.

تمرین

۱. نرخ بازده‌های سه ماههٔ یک سرمایه گذاری سهام عادی (سود سهام بعلاوهٔ تغییر ارزش به عنوان درصدی از ارزش در شروع سرمایه گذاری) برای یک دورهٔ دو ساله را به این ترتیب در نظر بگیرید:

سه ماهه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
نرخ بازده	۴/۸	۲/۸	۹/۹	۷/۶	۹/۵	۶	۸/۴	-۵

فرض کنید که این هشت مشاهده را می‌توان به عنوان یک نمونهٔ تصادفی از جامعهٔ نامتناهی تمام نرخهای سه ماههٔ مربوط به بازده سهام درنظر گرفت و فرض کنید این جامعه تقریباً توزیع نرمال دارد. واریانس نرخ بازدهی سهام عادی سرمایه گذاری را در سطح اطمینان ۹۹ درصد برآورد کنید.

۲. معاون اداری و مالی یک دانشگاه درصدد مقایسهٔ پراکندگی نمره‌های طرح تلاش و بهره‌وری کارمندانی است که به وسیلهٔ معاون پژوهشی و معاون آموزشی دانشگاه ارزشیابی می‌شوند. معاون اداری و مالی از بین کارکنان هریک از معاونان آموزش و پژوهشی یک نمونهٔ تصادفی ۵ نفره انتخاب کرده که نمره‌های آنها به این ترتیب ارائه شده است:

فرد	۱	۲	۳	۴	۵
نمره‌های معاون پژوهشی	۴	۳/۹	۲/۷	۳/۱	۳/۵
نمره‌های معاون آموزشی	۲	۳/۱	۲/۵	۴	۳/۹

توزیع نمره‌های کارمندانِ تحت نظارت هر دو معاون دانشگاه نرمال است. پراکندگی نمره‌ها را در سطح اطمینان ۹۰ درصد مقایسه کنید.

۳. اگر برای نمونه‌ای به حجم $n = ۲۰$ از قوطیهای پودر لباسشویی کارخانه‌ای، $\Sigma (x_i - \bar{x})^۲ = ۲۰۰$ باشد، در سطح اطمینان ۹۵ درصد، فاصله اطمینان برای واریانس و انحراف معیار قوطیهای پودر لباسشویی پر شده را در کارخانه تشکیل دهید.

۹ـ۱۰ خلاصه

در این فصل، فنون تخمین آماری (بخصوص تخمین فاصله‌ای) بتفصیل بحث و بررسی شد. تخمین فاصله‌ای μ_xو $\mu_۱ - \mu_۲$ در شرایط مختلف از مهمترین مباحث فصل بودند. علاوه بر تخمین فاصله‌ای نسبت موفقیت جامعه (p) و تخمین تفاضل نسبت دو جامعه ($p_۱ - p_۲$) براساس آماره $\bar{p}_۱ - \bar{p}_۲$ نیز برای مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری استفاده شد.

قسمت دیگر فصل شامل فنون تعیین اندازه نمونه بود. گفتیم چنانچه داده‌ها از مقیاس کمّی برخوردار باشند از مفاهیم تخمین فاصله‌ای μ_x برای تعیین اندازه نمونه استفاده می‌شود و همچنین اگر داده‌ها کیفی باشند از مفاهیم تخمین فاصله‌ای p استفاده می‌گردد.

تخمین فاصله‌ای واریانس جامعه و مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری با استفاده از تخمین فاصله‌ای نسبت دو واریانس از دیگر مباحثی بود که از آن صحبت شد.

معرفی توزیعهای جدید t استیودنت، کای ـ مربع ($\chi^۲$) و فیشر (F) از نکات قابل توجه است. توزیع t استیودنت یک توزیع قرینه است که برحسب α و $d.f = n - ۱$ تعریف می‌شود؛ این توزیع کوتاهتر از توزیع نرمال است. توزیع کای ـ مربع یک توزیع نامتقارن است که برای تخمین فاصله‌ای واریانس جامعه به کار می‌رود. توزیع F نیز یک توزیع نامتقارن است که چوله به راست است. این توزیع بر حسب α، درجهٔ آزادی صورت ($d.f_۱$) و درجهٔ آزادی مخرج ($d.f_۲$) تعریف می‌شود و برای تخمین فاصله‌ای نسبت واریانس دو جامعهٔ آماری از آن استفاده می‌شود.

۱۰ـ۱۰ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. استفاده از رابطهٔ $\sigma_x \simeq \frac{\text{دامنهٔ تغییرات}}{۴}$ در جامعه‌ای که از توزیع نرمال برخوردار است، امکانپذیر است. ص ☐ غ ☐

۲. اگر $p = \frac{1}{2}$ باشد، حاصلضرب $p(1-p)$ حداقل است. ص □ غ □

۳. از توزیع t فقط در صورتی که حجم نمونه کمتر از ۳۰ باشد، استفاده می‌شود. ص □ غ □

٤. در تخمین نسبت موفقیت جامعه، p، می‌توان هم از $\sigma_{\bar{p}}$ و هم از $S_{\bar{p}}$ استفاده کرد. ص □ غ □

۵. آمارهٔ S_x^2 از توزیع کای ـ مربع (χ^2) برخوردار است. ص □ غ □

٦. برای تخمین $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ به کمک رابطه‌های این فصل، شرط نرمال بودن هر دو جامعهٔ آماری ضروری است. ص □ غ □

۷. در صورتی که UCL و LCL هر دو منفی باشد، p_1 و p_2 با هم اختلاف معناداری ندارند. ص □ غ □

۸. در صورتی که UCL و LCL هر دو مثبت باشد، μ_1 بزرگتر از μ_2 است. ص □ غ □

۹. رابطهٔ $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ یک نوع میانگین وزنی از واریانس نمونه‌هاست. ص □ غ □

۱۰. توزیع t استیودنت همواره کشیده‌تر از توزیع نرمال است. ص □ غ □

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. تعبیر $P(-25/1 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -6/7) = 0/95$ این است که در سطح خطای ۵ درصد می‌توان ادعا کرد:

الف) $\mu_1 < \mu_2$ ج) $\mu_1 > \mu_2$

ب) $\mu_1 = \mu_2$ د) اطلاعات برای اظهار نظر کافی نیست.

۱۲. اگر انحراف معیار جامعه ۲۰ و میزان دقت برآورد ۵ باشد، حداقل تعداد نمونه لازم برای به دست آوردن فاصله اطمینان ۹۵ درصد میانگین کدام است؟

الف) ٦۲ ج) ۱۵۷

ب) ۸ د) ۳٤۷

۱۳. کدام یک از این رابطه‌ها درست است؟

الف) $E(\bar{X}) = \mu_x$ ج) $\mu_x = \bar{X}$

ب) $E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}}$ د) الف و ب

۱٤. اگر $\bar{p}$ آماره p باشد؛ بنابراین $\sigma_{\bar{p}}$ عبارت است از:

الف) $\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$ ج) $\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{N}}$

ب) $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ د) $\sqrt{np(1-p)}$

۱۵. چنانچه حجم نمونه کوچک، جامعه غیرنرمال و ε خطای برآورد باشد، حجم نمونه

چگونه محاسبه می‌شود؟

الف) $\frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}$ ج) $\frac{\sigma_x^2}{\alpha\varepsilon^2}$

ب) $\frac{\sigma^2}{\alpha^2\varepsilon^2}$ د) $\frac{\sigma^2}{\alpha^2\varepsilon}$

۱۶. فرض کنید $\bar{x}_1$ میانگین نمونه‌ای به حجم n_1 و $\bar{x}_2$ میانگین نمونه‌ای به حجم n_2 از دو جامعهٔ مستقل باشند، $\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ برابر است با:

الف) $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ ج) $\frac{\sigma_1^2}{\sqrt{n_1}} + \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{n_2}}$

ب) $\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ د) $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

۱۷. اگر $\bar{x}$ دارای توزیع نرمال باشد، چند درصد $\bar{x}$ ها در فاصلهٔ $\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$، قرار می‌گیرند؟

الف) ۶۸/۳ درصد ج) ۹۵/۴۵ درصد

ب) ۹۹/۷۳ درصد د) ۹۰ درصد

۱۸. اگر $n = 10$، $S_x^2 = 80$ و $\sigma_x^2 = 65$ باشد، مقدار متغیر استاندارد کای ـ مربع کدام است؟

الف) ۱۱/۰۸ ج) ۱/۲۳

ب) ۱۵/۳۲ د) ۸/۱۲۵

۱۹. حد بالا و پایین تخمین فاصله‌ای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ در سطح اطمینان ۹۹ درصد کوچکتر از ۱ است. کدام گزینه صحیح است؟

الف) σ_1^2 بزرگتر از σ_2^2 است. ج) σ_2^2 کوچکتر از σ_1^2 است.

ب) σ_1^2 کوچکتر از σ_2^2 است. د) σ_1^2 و σ_2^2 با هم اختلاف معناداری ندارند.

۲۰. از قاعدهٔ چی‌بی‌شف در کدام یک از موارد زیر برای تخمین μ_x استفاده می‌شود.

الف) توزیع $\bar{x}$ نرمال باشد. ج) توزیع جامعهٔ آماری نرمال باشد.

ب) توزیع $\bar{x}$، t باشد. د) توزیع $\bar{x}$، غیرنرمال یانامشخص باشد.

مسائل

۲۱. مدت زمان ماندن مشتریان در یک فروشگاه بزرگ از توزیع نرمال برخوردار است. از مشتریان فروشگاه ۱۰ نفر به طور تصادفی انتخاب، شده و مدت زمان ماندن آنها

به این ترتیب یادداشت شده است:

۲۰ , ۲۵ , ۲۲ , ۲٤ , ۲۷ , ۳۰ , ۳۵ , ۲۸ , ۲۷ , ۲۰ : مدت زمان ماندن بر حسب دقیقه

سطح اطمینان ۹۵ درصد را در نظر گرفته و این تخمینها را محاسبه کنید:

الف) میانگین تأخیر کل مشتریان

ب) پراکندگی زمان ماندن کل مشتریان

اگر این نمونه یک نمونهٔ مقدماتی باشد و دقت برآورد ۳ ± دقیقه باشد حجم نمونهٔ مناسب را برآورد کنید.

۲۲. فرض کنید مدت زمان ماندن برای یک نمونهٔ تصادفی ۸ تایی از یک فروشگاه مشابه فروشگاه مسأله ۲۱ به این شرح به دست آمده است:

۱۵ , ۱۷ , ۲۰ , ۲۲ , ۱۰ , ۱۲ , ۱٤ , ۱۳ : مدت زمان ماندن بر حسب دقیقه

با توجه به اینکه فرض نرمال‌بودن توزیع زمان ماندن مشتریان این فروشگاه قابل قبول است.

الف) در سطح اطمینان ۹۰ درصد پراکندگی زمان ماندن مشتریان این فروشگاه را با فروشگاه مسأله ۲۱ مقایسه کنید.

ب) در سطح اطمینان ۹۰ درصد میانگین زمان ماندن مشتریان این فروشگاه را با فروشگاه مسأله ۲۱ مقایسه کنید.

۲۳. پنج مدیر و چهار مأمور بازاریابی سهم بازار را در صنعت برای شرکت خود به این ترتیب تعیین کرده‌اند:

مدیران	۲۲/۵	۲۵	۳۰	۲۷/۵	۲۰
بازاریابان	۲۱	۱۷/۵	۱۷	۲۰	

بررسیها نشان می‌دهد که فرض نرمال بودن برای نمره‌های ارزیابی قابل قبول است. در سطح خطای یک درصد ارزیابی مدیران را با بازاریابان مقایسه کنید.

۲٤. در بررسی دقیق نقاط قوت و ضعف عوامل محیطی در یک صنعت، امتیازات زیر به وسیلهٔ ۵ کارشناس برای تکنولوژی به دست آمده است:

x_i : ۵۵ , ٦۰ , ٦۷ , ۵۸ , ۵۰

اگر این ۵ نفر نشان‌دهندهٔ یک نمونهٔ تصادفی از کل محققان باشند. میانگین و واریانس

نمره‌های تکنولوژی را در سطح خطای یک درصد برآورد کنید.

۲۵. هدف یک تحقیق مقایسهٔ کیفیت دو نوع کالا با یکدیگر است. ملاک کیفیت نرخ اثربخشی هریک از کالاهاست. نرخ اثربخشی نمونه‌هایی از کالای نوع «الف و ب» در این جدول نشان داده شده است:

نوع الف	۷۲	۷۸	۷۳	۶۹	۷۵	۷۴	۷۵
نوع ب	۷۸	۷۶	۸۱	۷۴	۸۲		

توزیع نرخ اثربخشی برای هر دو کالا نرمال است. در سطح اطمینان ۹۰ درصد موارد زیر را حساب کنید.

الف) آیا می‌توان گفت پراکندگی کیفیت دو کالا مساوی است؟ چرا؟

ب) میانگین کیفیت دو کالا را با یکدیگر مقایسه کنید.

ج) فرض کنید نمونه حاصل از نوع «ب» یک نمونهٔ مقدماتی است. مجدداً اندازه نمونه مناسب را محاسبه کنید.

د) فاصله اطمینان را برای میانگین کیفیت کالای نوع «الف» برآورد کنید.

۲۶. هدف یک تحقیق برآورد میانگین تجربه دبیران دبیرستانی یک شهر بزرگ است. بدین منظور یک نمونهٔ تصادفی ۱۰ نفره از بین دبیران دبیرستانهای شهر انتخاب شده که میانگین تجربه آنها ۶ سال و پراکندگی تجربه‌شان ۲/۵ سال است. در سطح اطمینان ۹۹ درصد به این سؤالات پاسخ دهید:

الف) با فرض نرمال بودن توزیع تجربه دبیران، میانگین تجربه آنان را برآورد کنید.

ب) فرض کنید توزیع تجربه در میان دبیران غیر نرمال است. با فرض اینکه نمونه انتخاب شده یک نمونهٔ مقدماتی است و دقت برآورد یک سال است، حجم نمونهٔ لازم را تعیین کنید.

ج) فرض کنید نمونه انتخاب شده یک نمونهٔ مقدماتی است و فرض نرمال بودن تجربه پذیرفتنی است. اگر دقت برآورد یک سال باشد، حجم نمونه را تعیین کنید.

د) ذکر کنید علت اختلاف حجم نمونه در بند «ب و ج» چیست؟

۲۷. در نتیجه مطالعهٔ وسیعی در زمینهٔ مخارج زندگی خانواده‌ها در شهریور ماه گذشته، معلوم شد که میانگین مخارج هفتگی خواربار برای خانواده‌هایی که یک یا دو فرزند دارند ۷۰۰ تومان و انحراف معیار آن ۱۵۰ تومان است. برای تحقیق در وضعیت جاری مخارج، قرار است نمونه‌ای تصادفی از خانواده‌هایی که یک یا دو فرزند دارند انتخاب و مخارج خواربار آخرین هفته آنها را یادداشت کنند. اگر بخواهیم ۹۵ درصد مطمئن باشیم که دقت برآورد میانگین جامعهٔ مخارج خواربار هفتگی برای این گونه خانواده‌ها بیشتر از ۲۰ تومان نیست، چه حجمی

برای نمونه باید در نظر بگیریم؟

۲۸. مطالعه‌ای به منظور تعیین سبک تصمیم‌گیری مشارکتی مدیران در دست برنامه‌ریزی است. تحقیقات مشابه نشان می‌دهد که این نسبت بزرگتر از ۰/٦۰ نیست. دقت برآورد را ۰/۰٤ در نظر بگیرید و حجم نمونه را در سطح خطای یک درصد تعیین کنید.

۲۹. مطالعه‌ای در منطقه معینی به منظور تعیین نسبت خانواده‌هایی که از نظر بهداشتی در وضع نامناسبی هستند برنامه‌ریزی می‌شود. این تصور وجود دارد که نسبت مزبور بزرگتر از ۰/۳۵ نمی‌تواند باشد. حدود اطمینان ۰/۹۵ و $\varepsilon = ۰/۰۵$ مورد نظر است. چند خانواده برای این مطالعه باید انتخاب شوند؟

۳۰. تحلیلگری می‌خواهد سهم کفش گام را در بازارفروش کفشها تعیین کند؛ یعنی نسبت فروش کفش گام را به فروش کلیهٔ کفشها به دست آورد. از روی داده‌هایی که از فروشگاههای مختلف به دست آمده است، تحلیلگر درمی‌یابد که از کل ۱۰ هزار جفت کفش فروخته شده، ۱۲۰۰ جفت از نوع کفش گام بوده‌اند.

الف) سهم کفش گام را در بازار به صورت نقطه‌ای برآورد کنید.

ب) سطح اطمینان ۹۸ درصد را برای سهم کفش گام در بازار محاسبه کنید.

۳۱. مدیر فروش شرکتی می‌خواهد بداند که آیا بوی اسانس لیمو و توت‌فرنگی در یک مادهٔ ظرفشویی برای مصرف‌کنندگان یکسان است یا خیر. با ۲۵۰ مصرف‌کننده مصاحبه شده است؛ ۱٤۵ نفر بوی لیمو و ۱۰۵ نفر بوی توت فرنگی را ترجیح داده‌اند. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹ درصد برای نسبتی از مصرف‌کنندگان که بوی توت فرنگی را ترجیح می‌دهند، بسازید.

۳۲. از سازمان «الف» یک نمونهٔ ۲۰۰ تایی انتخاب شده است که ۱۲۰ نفر از آنها از کار خود راضی‌اند؛ در حالی که فقط ۱۵۰ نفر از یک نمونهٔ تصادفی ۳۰۰ تایی از سازمان «ب» از کار خود راضی هستند. در سطح خطای ۵ درصد نسبت افراد راضی را در دو سازمان با یکدیگر مقایسه کنید.

۳۳. دانشجویی در پایان نامهٔ خود درصدد مقایسهٔ میزان مهارتهای انسانی مدیران در دو سطح عملیاتی و میانی است. بدین منظور از بین مدیران سطح میانی یک نمونهٔ ۱۰ تایی انتخاب کرده که میانگین مهارت انسانی آنها ٤۵ و انحراف معیار آن ۱۵ است. میانگین و انحراف معیار یک نمونهٔ ۱۵ نفره از مدیران سطح عملیاتی به ترتیب ۵۲ و ۱٤ است. توزیع مهارت انسانی در هر دو سطح نرمال است. در سطح خطای ۲ درصد میانگین مهارت انسانی را در دو سطح میانی و عملیاتی مقایسه کنید.

۳٤. جدول زیر نشان‌دهندهٔ روند نرخ بهره‌وری نیروی کار تولیدی امریکا، انگلستان و کانادا از سال ۱۹۷۵ تا ۱۹۸٦ است.

سال	امریکا	کانادا	انگلستان	سال	امریکا	کانادا	انگلستان
۱۹۷۵	۲/۵	۲/۹	۲/۵	۱۹۸۱	۲/۲	۱/٤	۲/٤
۱۹۷٦	٤/٦	٤/۵	۲/۹	۱۹۸۲	۲/۲	۲/۹	۵/۳
۱۹۷۷	۳	۳/۲	۱/۹	۱۹۸۳	۵/۸	۲/۹	٦/۱
۱۹۷۸	۱/۵	۱/۲	۰/۵۰	۱۹۸٤	۵/۵	۲/۳	٤/٤
۱۹۷۹	−۰/۱۰	−۰/۳۰	−۰/۲۰	۱۹۸۵	۵/۱	۲/۵	۳/۸
۱۹۸۰	۰	۰/٤۰	۱/۳	۱۹۸٦	۳/۷	−۰/۲۰	۳/٦

اگر این ۱۲ سال به عنوان نمونه تلقی شود و فرض نرمال بودن را برای نرخ بهره‌وری بپذیریم به این سؤالات پاسخ دهید:

الف) با اطمینان ۹۰ درصد فاصله اطمینان اختلاف میانگین بهره‌وری برای دو کشور امریکا و کانادا تشکیل دهید.

ب) در سطح اطمینان ۹۹ درصد حدود اطمینان واریانس بهره‌وری را در کشور انگلستان محاسبه کنید.

ج) فاصله اطمینان میانگین نرخ بهره‌وری را در کشور امریکا برآورد کنید (α=۰/۰۱).

د) میزان واریانس بهره‌وری را در دو کشور کانادا و انگلیس مقایسه کنید (α=۰/۰۲).

پاسخنامهٔ سؤالات

۱) ص	۲) غ	۳) غ	٤) غ
۵) ص	٦) ص	۷) غ	۸) ص
۹) ص	۱۰) غ	۱۱) الف	۱۲) الف
۱۳) د	۱٤) ب	۱۵) ج	۱٦) د
۱۷) ج	۱۸) الف	۱۹) ب	۲۰) د

@Fileaccunting

فصل یازدهم

آزمون فرض آماری

۱۱ـ۱ مقدمه

در مدیریت، تحقیقات اغلب با سؤال و فرضیه شروع می‌شوند. فنون آمار استنباطی برای پاسخ به سؤالات تحقیق، همان فنون تخمین آماری هستند که در فصل دهم بتفصیل بیان شدند. بسیاری از تحقیقات مدیریتی از مرحلهٔ سؤال گذر کرده، به مرحلهٔ فرضیه می‌رسند. فرضیه حدسی زیرکانه در خصوص پارامتر جامعه است. فنون آماری مناسب برای بررسی صحت یا سقم فرضیه‌ها، فنون «آزمون فرض آماری»[1] هستند که در این فصل مبانی آنها بیان خواهد شد.

به طور کلی هدف آزمون فرض آماری، تعیین این موضوع است که با توجه به اطلاعات به دست آمده از داده‌های نمونه، حدسی که دربارهٔ خصوصیتی از جامعه می‌زنیم به طور قوی تأیید می‌شود یا خیر. این حدس بنا به هدف تحقیق، نوعاً شامل ادعایی دربارهٔ مقدار یک پارامتر جامعه است. «در واقع هر حکمی دربارهٔ جامعه را یک فرض آماری می‌نامند که قابل قبول بودن آن باید بر مبنای اطلاعات حاصل از نمونه گیری از جامعه بررسی شود».

چون ادعا ممکن است صحیح یا غلط باشد؛ بنابراین دو فرض مکمل در ذهن به وجود می‌آید: فرض H (ادعا صحیح است) و فرض ´H (ادعا غلط است).

با به کاربردن اطلاعاتی که از مشاهدات نمونه به دست می‌آید، تصمیم‌گیرنده باید یکی از این دو تصمیم یا استنباط را انتخاب کند:

´H را رد کند و نتیجه بگیرد که H به وسیلهٔ داده‌ها قویاً تأیید می‌شود.

´H را رد نکند و نتیجه بگیرد که داده‌ها H را قویاً تأیید نمی‌کنند.

---

1. hypothesis testing

فرایند انتخاب یکی از دو تصمیم فوق را آزمون فرض آماری می‌نامند.

پذیرش یا عدم پذیرش یک فرض آماری تا حدودی با اثبات یا رد یک گزارهٔ ریاضی متفاوت است. یک گزارهٔ ریاضی را یا اثبات می‌کنند یا اینکه با ارائه مثال ناقض، آن را رد می‌کنند. در هر حالت، نتیجه‌ای که به دست می‌آید، بدون هیچ شکی برقرار است؛ ولی در مقابل، نتیجهٔ حاصل از آزمون فرض آماری به وسیلهٔ تحلیل داده‌های تجربی حتمی و قطعی نیست.

شیوهٔ مناسب برای آزمون فرض دارای مراحل منطقی است. قبل از ذکر مراحل مورد نظر به بیان مفاهیم و اصطلاحات استفاده شده در آزمون فرض پرداخته می‌شود. واقعیت آن است که مهمترین مرحله در آزمون فرض آماری تبدیل «فرضیه پژوهشی» و نقیض آن به «فرضیه‌های آماری» است. به طوری که اندیشمندان از این مرحله با عنوان «گلوگاه» یاد می‌کنند؛ بنابراین مرحله فوق به طور مبسوط با عنوان فرض صفر و فرض مقابل تشریح می‌شود.

۱۱-۲ فرض صفر و فرض مقابل

برای بحث دربارهٔ فرمولبندی مسألهٔ آزمون فرض آماری و مراحل حل آن، به معرفی پاره‌ای از تعاریف و مفاهیم نیاز داریم. قبل از آنکه به این مبحث به طور کلی بپردازیم، مفاهیم پایه‌ای را از طریق ارائه مسأله خاصی بررسی می‌کنیم که در آن رفتار آزمایش از توزیع دو جمله‌ای پیروی می‌کند.

فرضیهٔ پژوهشی. نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 در کشور بیش از ۰/۶۰ است. فرض کنید یک نمونه مرکب از ۲۰ مدیر انتخاب شده و تعداد افراد برخوردار از سبک S_1، X، ثبت شود. از داده‌های به دست آمدهٔ این آزمایش برای پاسخ به این سؤال چگونه می‌توان استفاده کرد: «آیا گواه قانع‌کننده‌ای بر این مدعا وجود دارد که نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 بیش از ۰/۶۰ است؟»

نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1، همان p است که مقدار آن را تنها وقتی می‌توان به طور صحیح تعیین کرد که آزمایش تعیین سبک بر روی کلیهٔ مدیران کشور انجام گیرد. لکن اطلاعات ما محدود به نتایج حاصل از ۲۰ مدیر است، با فرض اینکه بتوانیم ۲۰ مدیر را به عنوان مشاهدات مستقلی از جامعهٔ تمام مدیران کشور در نظر بگیریم، مدل احتمال X عبارت است از یک توزیع دو جمله‌ای با $n=۲۰$ و پارامتر نامعلوم p.

با توجه به فرضیه‌ای که در صورت مسأله بیان شد دو فرض آماری ذیل مطرح می‌شود:

نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 بیش از ۰/۶۰ است: $p > ۰/۶۰$

نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 حداکثر ۰/۶۰ است: $p \leq ۰/۶۰$

کمیت نامعلوم، درصد مدیران برخوردار از سبک S_1 است. از دو حکمی که دربارهٔ این کمیّت نامعلوم وجود دارند، یکی را فرض صفر[1] (H_0) و دیگری را فرض مقابل[2] (H_1) می‌نامند. برای اینکه معلوم شود کدام فرض را باید فرض صفر نامید لازم است که تفاوت اساسی بین نقش و مفهوم این دو اصطلاح بروشنی درک شود.

قبل از اینکه ادعا کنیم حکمی معتبر است، باید شواهد کافی در تأیید آن به دست آوریم. در نتیجه، شخص تحلیلگر باید حکم را غلط بداند مگر اینکه داده‌های به دست آمده خلاف آن را قویاً تأیید کنند. به عبارت دیگر باید فرض صفر (H_0) را صحیح دانست و فقط وقتی آن را رد کرد که داده‌ها قویاً برخلاف آن حکم کنند. تشابه زیادی بین این امر و محاکمه در دادگاه وجود دارد که در آن هیأت منصفه فرض صفر «مجرم نبودن» را اتخاذ می‌کنند مگر اینکه شواهد قانع‌کننده‌ای مجرم بودن متهم را ثابت کنند و نه اینکه در اثبات بیگناهی او بکوشند.

با عنایت به نکات فوق، می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه بخواهیم یک ادعا را از طریق تأیید آن به وسیلهٔ اطلاعات حاصل از نمونه آزمون کنیم، نفی آن ادعا را فرض صفر (H_0) و خود آن را فرض مقابل (H_1) می‌گیریم؛ بنابراین تشخیص فرض صفر و فرض مقابل در فرضیهٔ ما باید به این صورت باشد:

$$\begin{cases} H_0: & p \leq ۰/۶۰ \quad \text{نقیض ادعا:} \\ H_1: & p > ۰/۶۰ \quad \text{ادعا:} \end{cases}$$

حال به تعریف فرضیهٔ دیگری می‌پردازیم:

فرضیه پژوهشی. میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری مدیران سازمان دست‌کم ۵۰ است. فرضیه‌های آماری این فرضیه براساس روش فوق عبارتند از:

$$\begin{cases} H_0: \mu_x < ۵۰ & \text{(میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری مدیران سازمان کمتر از ۵۰ است.)} \\ H_1: \mu_x \geq ۵۰ & \text{(میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری مدیران سازمان دست کم ۵۰ است.)} \end{cases}$$

---

1. null hypothesis 2. alternative hypothesis

قاعدهٔ پذیرفته شده در آمار این است که محقق فرض H_0 را آزمون کند و براساس تأیید یا رد فرض H_0 به تحلیل فرضیهٔ پژوهشی بپردازد. واضح است که فرض H_0 در مثال فوق آزمون پذیر نیست، چراکه تعریف آماری آن فاقد مرز شناخته شده است. میانگین کمتر از ۵۰، یک فرض بدون حد مشخص است که هر مقداری را می‌توان برای آن متصور شد. مشخص است که آزمون چنین فرضیه‌ای از نظر ریاضی امکانپذیر نیست. پس اگر H_0 آزمون‌پذیر نیست، ناچار باید از نقیض آن یعنی H_1 استفاده کرد. از آنجا که H_1 دارای تساوی (=) است، پس آزمون‌پذیر است؛ بنابراین به منظور رعایت اصول آزمون فرض، جای H_0 و H_1 را تغییر داده، به آزمون H_0 به شرح ذیل می‌پردازیم:

$$\begin{cases} H_0: \mu_x \geq ۵۰ & \text{ادعا:} \\ H_1: \mu_x < ۵۰ & \text{نقیض ادعا:} \end{cases}$$

تعریف H_0 و H_1 در این فرضیهٔ پژوهشی با فرضیهٔ مربوط به سبک مدیران در ابتدای بحث کاملاً متفاوت است. در فرضیهٔ سبک مدیران H_0 نشان‌دهنده نقیض فرضیهٔ پژوهشی است و در این فرضیه H_0 نشان‌دهنده ادعاست. علی‌رغم مقدمهٔ ابتدای فصل آنچه ما را به تعریف H_0 سوق می‌دهد، قاعدهٔ آزمون‌پذیر بودن آن است. «قاعده این است که همواره باید فرض صفر دربرگیرندهٔ تساوی باشد. در زمینهٔ نظریهٔ اخیر می‌توان پذیرفت که H_0 گاهی بیان‌کنندهٔ ادعا و گاهی بیان‌کنندهٔ نقیض ادعاست. آنچه تعریف H_0 را شکل می‌دهد آزمون‌پذیر بودن آن است و آن چیزی نیست جز آنکه برای H_0 باید تساوی (=) وجود داشته باشد».

۱۱.۳ سطح معنی‌دار و خطاهای آماری

وقتی که فرضیه‌های آماری تعریف شدند، قدم بعدی مشخص کردن درجه‌ای برای معنی‌دار بودن تفاوتها (α) و حجمی برای نمونه مورد تحقیق (n) است.

روش کار این است که فرض H_0 را به نفع فرض H_1 رد کنیم به شرط اینکه از یک آزمون آماری مقداری به دست آوریم که احتمال وقوع آن مقدار با توجه به H_0 برابر یا کمتر از یک احتمال بسیار کوچک باشد که با α نشان داده می‌شود. این احتمال وقوع

کوچک را «سطح‌معنی‌دار»[1] می‌گویند. مقادیر مرسوم برای ∝ بیشتر ۰/۰۱ و ۰/۰۵ است. از آنجا که مقدار ∝ در تعیین اینکه H_0 باید رد شود یا نه دخالت مستقیم دارد، الزام رعایت عینیت در تحقیق ایجاب می‌کند که ∝ را پیش از شروع به جمع‌آوری داده‌ها مشخص کنیم.

سطح معنی‌داری که محقق برای تعیین ∝ در تحقیق انتخاب می‌کند براساس تخمین او از اهمیت و یا درجهٔ قابلیت کاربرد یافته‌هایش مبتنی است. طبیعی است که اگر تحقیق مثلاً دربارهٔ آثار درمانی عمل جراحی روی مغز باشد، محقق باید مقدار ∝ را خیلی کمتر در نظر بگیرد؛ زیرا خطرهای رد کردن نادرست فرضیه صفر ـ پذیرفتن نابجای فرضیهٔ مقابل آن که احتمالاً به توصیهٔ یک تکنیک درمانی غلط منجر خواهد شد ـ بسیار زیاد است.

هنگام اتخاذ تصمیم دربارهٔ H_0 ممکن است دو نوع خطا پیش آید: یکی «خطای نوع اول»[2] که عبارت است از رد کردن H_0 در حالی که فرض درست است و دیگری «خطای نوع دوم»[3] که در آن H_0 پذیرفته می‌شود در حالی که فرض غلط است.

احتمال وقوع خطای نوع اول با ∝ ارتباط دارد؛ هرچه ∝ بزرگتر شود، احتمال اینکه H_0 را به غلط رد کنیم یا به عبارت دیگر احتمال اینکه مرتکب خطای نوع اول شویم، افزایش می‌یابد. خطای نوع دوم معمولاً با β(بتا) نمایش داده می‌شود. ∝ و β در اینجا، هم برای نشان‌دادن نوع خطاها و هم احتمال ارتکاب آن خطاها به کار می‌روند؛ یعنی:

∝ = P (خطای نوع اول) = P [رد کردن H_0 وقتی H_0 درست است]

β = P (خطای نوع دوم) = P [رد نکردن H_0 وقتی H_1 درست است]

احتمال ∝ به مقدار مشخص پارامتر در دامنه‌ای بستگی دارد که H_0 آن را دربرمی‌گیرد و حال آن که β به مقدار پارامتر در دامنه‌ای بستگی دارد که H_1 آن را دربرمی‌گیرد. این خطاها و احتمال آنها را در رابطه با H_0 می‌توان در جدول ۱ـ۱۱ خلاصه کرد.

---

1. significant level
2. type I error
3. type II error

جدول ۱ـ۱۱ دو نوع خطای استنباطی: α و β

نتیجه‌گیری از نمونه	گزینه‌های صحیح	
	H_0 درست است	H_0 غلط است
H_0 پذیرفته می‌شود	تصمیم درست	خطای نوع دوم (β)
H_0 رد می‌شود	خطای نوع اول (α)	تصمیم درست (توان آزمون)

واضح است که بین α و β یک رابطهٔ معکوس وجود دارد. با بالارفتن α، مقدار β کاهش می‌یابد و بالعکس. این نوع رابطه در آمار به «بده ـ بستان»[1] بین α و β معروف است. آنچه مسلم است مجموع α و β الزاماً یک نیست؛ برای مثال، چنانکه در شکل ۱ـ۱۱ مشاهده می‌شود با بالارفتن ناحیه H_1 که دربرگیرندهٔ سطح معنی‌دار است، سطح H_0 کوچکتر می‌شود. این بدین معناست که احتمال پذیرش یک فرض نادرست صفر کاهش می‌یابد، ولی اشکال این اطمینان آن است که ممکن است یک فرض درست صفر را به غلط رد کنیم. این مطلب در شکل ۱ـ۱۱ «ج» که سطح معنی‌دار آن ۵۰ درصد است بخوبی مشاهده می‌شود. در حالی که با کاهش مقدار α در قسمت «الف» شکل فوق فرض H_0 بدرستی انتخاب شده، چون مقدار خطای نوع اول کاهش و خطای نوع دوم افزایش یافته است.

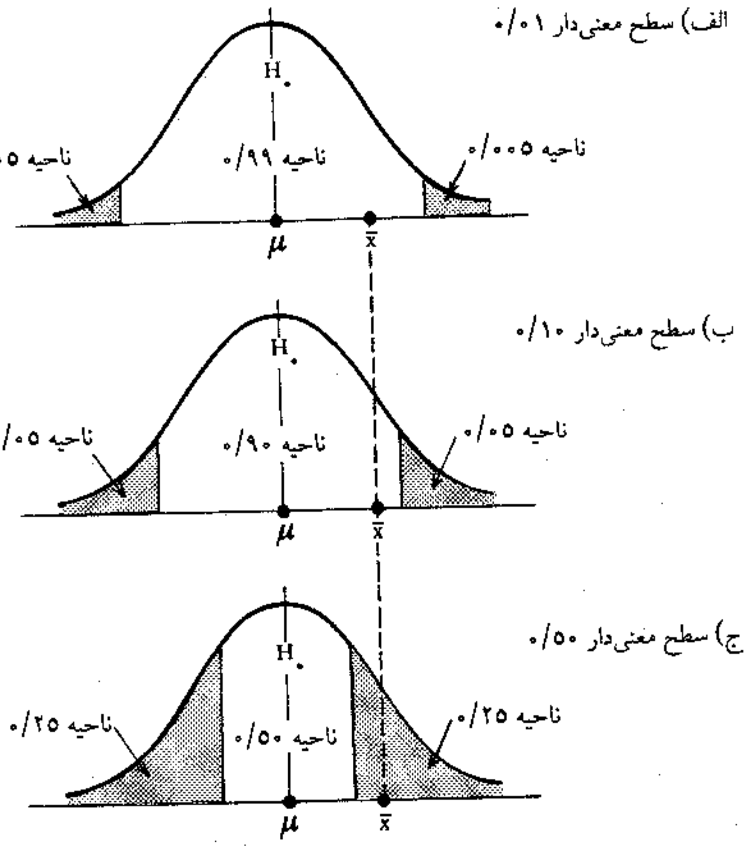
روشن است که در هر استنباط آماری احتمال وقوع یکی از این دو نوع خطا وجود دارد و لازم است که آزمون‌کننده به نوعی سازش که تعادل بین احتمال وقوع این دو نوع خطا را به حد مطلوب برساند، دست یابد. آزمونهای آماری مختلف، احتمال تعادلهای مختلفی را عرضه می‌کنند. در رسیدن به چنین تعادلی است که موضوع «تابع توان»[2] یک آزمون آماری مطرح می‌شود.

توان یا قدرت آزمون عبارت است از احتمال رد کردن H_0 وقتی که در حقیقت H_0 نادرست باشد؛ یعنی:

$$\text{توان آزمون} = 1 - (\text{احتمال وقوع خطای نوع دوم}) = 1-\beta \qquad (11\text{-}1)$$

---

1. trade off
2. power function



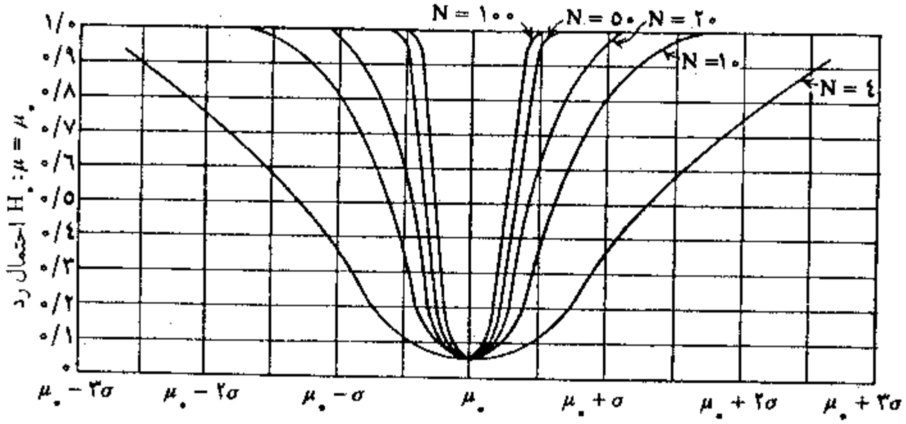
شکل ۱۱ـ۱ سه سطح معنی‌دار متفاوت

آنچه موجب کاهش خطای نوع اول و دوم و همچنین موجب افزایش توان آزمون می‌شود، افزایش حجم نمونه است.

منحنیهای شکل ۱۱ـ۲ نشان می‌دهند که وقتی حجم نمونه (n) افزایش می‌یابد احتمال وقوع خطای نوع دوم (β) کاهش می‌یابد. در این شکل افزایش توان آزمون دو دنباله (دو طرفه)[1] میانگین وقتی که حجم نمونه افزایش می‌یابد با یکدیگر مقایسه شده‌است. مشاهده می‌شود وقتی حجم نمونه از ۴ به ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ افزایش می‌یابد چگونه توان آزمون نیز زیادتر می‌شود. این نمونه‌ها از جامعه‌ای نرمال انتخاب شده‌اند که واریانس آن σ_x^2 است.

1. two tailed test

شکل ۲ـ۱۱ همچنین نشان می‌دهد که وقتی H_0 درست است ـ یعنی وقتی میانگین واقعی با μ_0 مساوی است ـ احتمال رد کردن H_0 مساوی ۵ درصد خواهد بود. این مسأله طبیعی است، چون $\alpha = 0/05$ است و α نشان دهندهٔ احتمال رد کردن H_0 است وقتی که در حقیقت H_0 درست باشد.



شکل ۲ـ۱۱ منحنیهای توان یک آزمون دو دنباله در سطح $\alpha = 0/05$ با نمونه‌های متعدد

۴ـ۱۱ توزیع نمونه گیری آماره

همانند تخمین آماری در تحقیقات استنباطی، صحت یک فرضیه آماری تنهابا استفاده از نمونه‌ای nتایی از جامعهٔ آماری و توزیع نمونه گیری آماره مشخص می‌شود. چنانکه در بحث تخمین، پارامتر مجهول با استفاده از توزیع نمونه گیری آماره برآورد می‌شد، در بحث آزمون فرض نیز تأیید یا رد فرض صفر (H_0) به توزیع نمونه گیری آماره بستگی دارد. واضح است که توزیع آماره متأثر از توزیع جامعه و شرایط تخمین و همچنین حجم نمونه است؛ بنابراین در این قسمت برای تعیین نوع توزیع نمونه گیری به شرایط تخمین رجوع و براساس شرایط تخمین توزیع نمونه گیری مشخص می‌شود. جدول ۲ـ۱۱ نشان‌دهندهٔ توزیعهای نمونه گیری مورد استفاده در این فصل است که برحسب نوع آزمون استفاده می‌شوند.

جدول ۲ـ۱۱ نشان می‌دهد که از چه توزیعهایی برای آزمون هر پارامتر استفاده خواهدشد. متغیرهای استاندارد مورد استفاده به کمک توزیع نمونه گیری تعریف

می‌شوند. اصطلاح «آماره آزمون»[1] که در این فصل از آن نام برده می‌شود، همان متغیر استاندارد فصل دهم است که این بار با پارامتر مورد آزمون تعریف می‌شود.

جدول ۱۱.۲ توزیع نمونه گیری آماره و آماره آزمون

پارامتر فرضیه پژوهشی	نماد آماری فرضیه	آماره	توزیع نمونه گیری	آماره آزمون (متغیر استاندارد)
میانگین جامعه	μ_0	$\bar{X}$	نرمال یا t استیودنت	Z یا t
مقایسهٔ میانگین دو جامعه	$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	نرمال یا t استیودنت	Z یا t
نسبت موفقیت جامعه	p_0	$\bar{p}$	نرمال	Z
مقایسهٔ موفقیت در دو جامعه	$p_1 - p_2$	$\bar{p}_1 - \bar{p}_2$	نرمال	Z
واریانس جامعه	σ_0^2	s_x^2	کای ـ مربع	χ^2
مقایسه واریانس دو جامعه	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\frac{s_1^2}{s_2^2}$	فیشر	F

۱۱.۵ آزمون فرض یک دنباله و دو دنباله

براساس آنچه گذشت نتیجه می‌گیریم که H_0 را باید پذیرفت مگر آنکه دلیل محکمی بر رد آن وجود داشته باشد. این بدین معناست که فرض صفر همیشه دربرگیرندهٔ سطح اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد است؛ بنابراین H_1 دربرگیرندهٔ سطح معنی‌دار α است. مفهوم کاربردی این گفته آن است که پذیرش یا رد H_0 با سطح اطمینان دلخواه صورت خواهد گرفت. پس همیشه H_1 به اندازهٔ α در دنباله(های) توزیع نمونه گیری تعریف خواهد شد. یک دنباله[2] یا دو دنباله[3] بودن آزمون فرض آماری به تعریف H_0 و H_1 بستگی دارد. این تعاریف با مثالهای ۱۱.۱ تا ۱۱.۳ تشریح می‌شوند.

مثال ۱۱.۱ در فرضیه‌ای پژوهشی چنین آمده است: «میانگین دستمزد کارگران یک کارخانه صنعتی کمتر از ۲۰ هزار تومان است.»

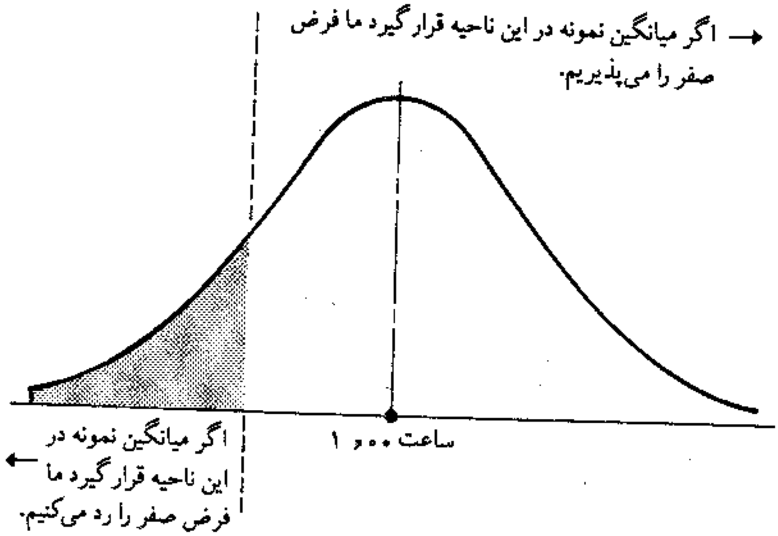
فرضیهٔ فوق طوری به فرضیه‌های آماری تبدیل می‌شود که H_0 نشان‌دهنده

1. test statistic
2. one tailed
3. two tailed

نقیض ادعا و H_1 نشان‌دهنده فرضیه پژوهشی باشد، به این صورت:

$$\begin{cases} H_0: \ \mu_x \geq ۲۰ & \text{نقیض ادعا:} \\ H_1: \ \mu_x < ۲۰ & \text{ادعا:} \end{cases}$$

واضح است که H_1 به اندازه α در دنبالهٔ چپ توزیع نمونه گیری $\bar{X}$ تعریف خواهد شد. این نوع آزمون را «آزمون یک دنباله چپ»[1] می‌خوانند و منحنی آن در شکل ۳ـ۱۱ دیده می‌شود:



شکل ۳ـ۱۱ آزمون یک دنباله چپ

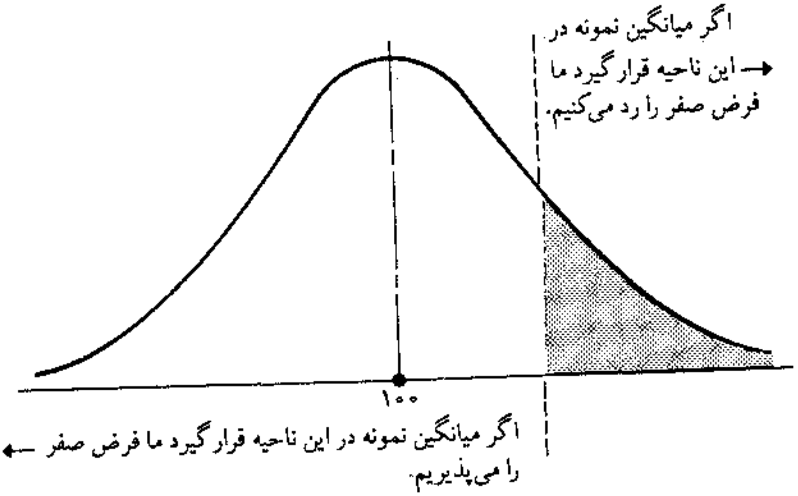
مثال ۲ـ۱۱ فرضیه‌ای پژوهشی به این صورت تدوین شده است: «حداکثر، ۱۰ درصد محصولات کارخانهٔ «الف» معیوب هستند.»

با تبدیل فرضیه پژوهشی به نقیض آن مشخص می‌شود که ادعا در H_0 و نقیض آن در H_1 قرار می‌گیرد؛ به این صورت:

$$\begin{cases} H_0: \ p \leq ۰/۱۰ & \text{ادعا:} \\ H_1: \ p > ۰/۱۰ & \text{نقیض ادعا:} \end{cases}$$

1. left tailed test

در این نوع آزمون، H_1 به اندازه α در دنبالهٔ راست توزیع نمونه گیری $\bar{p}$ تعریف می‌شود. منحنی این آزمون در شکل ۴ـ۱۱ آمده است. از آنجا که H_1 در دنبالهٔ راست تعریف شده است، این نوع آزمون را «آزمون یک دنباله راست»[1] می‌گویند.



شکل ۴ـ۱۱ آزمون یک دنباله راست

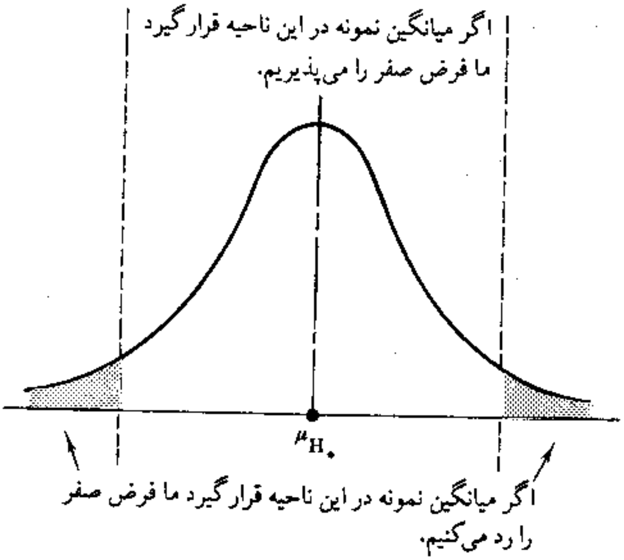
مثال ۳ـ۱۱ فرضیه پژوهشی در این مثال عبارت است از: «میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری کارمندان مرد با نمرهٔ مسئولیت‌پذیری کارمندان زن تفاوتی ندارد.»

فرضیه‌های آماری عبارت فوق چنین است:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 & \text{ادعا:} \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 & \text{نقیض ادعا:} \end{cases}$$

فرض آماری H_1 باید به اندازه 100α درصد در دنباله‌های توزیع $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ تعریف شود. چون قید مخالف بین μ_1 و μ_2 در H_1 دیده می‌شود. پس H_1 به اندازه $\frac{\alpha}{2}$ در دنباله راست و به اندازه $\frac{\alpha}{2}$ در دنبالهٔ چپ قرار می‌گیرد. دنبالهٔ چپ نشان‌دهنده $\mu_1 - \mu_2 < 0$ و دنبالهٔ راست نشان‌دهندهٔ $\mu_1 - \mu_2 > 0$ خواهد بود. طبیعی است H_0 نیز نشان‌دهندهٔ $\mu_1 = \mu_2$ است. منحنی این نوع فرضیه‌ها (فرضیه‌هایی با قید تساوی مطلق در H_0) در شکل ۵ـ۱۱ دیده می‌شود. چنین فرضیه‌هایی را آزمون دو دنباله (دو طرفه) می‌گویند.

1. right tailed test



شکل ۵ـ۱۱ آزمون دو دنباله

۶ـ۱۱ مراحل عمومی آزمون فرض آماری

از جمع‌بندی مبانی آزمون فرض که بیان شد می‌توان برای تمامی آزمون فرضهای آماری، مراحل چهارگانهٔ ذیل را تدوین کرد. این رویه تا آخر کتاب برای انجام دادن هر آزمونی اعمال خواهد شد.

مرحله اول. تعریف فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 (فرضها): براساس قاعده‌ای که بیان شد، چنانچه فرضیه پژوهشی مرز مشخصی (=) داشته باشد، H_0 نشان‌دهنده ادعا (فرضیه پژوهشی) خواهد بود؛ در غیر این صورت نقیض آن در H_0 تعریف شده و فرضیه پژوهشی در قالب نماد آماری در H_1 قرار خواهد گرفت. آن چه مسلم است فرض H_0 و H_1 مکمل یکدیگر هستند. با این توصیف H_0 گاهی بیان‌کننده ادعا و گاهی نقیض ادعا خواهد بود.

مرحلهٔ دوم. تعیین توزیع نمونه گیری آماره و نوع آمارهٔ آزمون (آمارهٔ آزمون): توزیع نمونه گیری به شرایط تخمین پارامتر مورد ادعا بستگی دارد. بسته به اینکه فرضیه پژوهشی چه نوع پارامتری را بیان می‌کند، توزیع نمونه گیری آماره و آماره آزمون تغییر خواهد کرد. آماره آزمون، همان متغیر استانداردی است که در بحث تخمین برای استخراج فواصل اطمینان از آن استفاده می‌شد، با این تفاوت که تمام اجزای آن در بحث آزمون معلوم خواهد بود. آماره آزمون از جدول ۲ـ۱۱ برحسب ضرورت استخراج خواهد شد.

مرحله سوم. تعیین سطح زیر منحنی H_0 و H_1 و محاسبهٔ مقدار بحرانی (مقدار بحرانی): سطح زیر منحنی H_0 و H_1 به توزیع نمونه‌گیری و مقدار α بستگی دارد. یک دنباله یا دو دنباله‌بودن آزمون نیز بر سطح زیرمنحنی فرضیه‌های آماری تأثیر مستقیم دارد. چنانکه بیان شده قاعده این است: «H_0 دربرگیرندهٔ سطح اطمینان و H_1 سطحی برابر α خواهد داشت.»

محاسبهٔ مقدار استانداردی که تفکیک‌کنندهٔ H_0 و H_1 به صورت عددی باشد از دیگر موارد ضروری در این مرحله است. مقدار استاندارد براساس نوع آزمون و مقدار α از جداول آماری موجود (پیوست کتاب) استخراج می‌شود. این مقدار با توجه به علامت آن، «مقدار بحرانی»[1] نامیده می‌شود. مقدار استاندارد و جدول آماری مورد نیاز برای استخراج آن براساس آمارهٔ آزمون تعیین می‌شود؛ برای مثال اگر آمارهٔ آزمون از نوع Z باشد، مقدار بحرانی براساس جدول استاندارد Z تعیین می‌شود و اگر از نوع کای ـ مربع باشد، براساس جدول χ^2 تعریف می‌شود.

مرحلهٔ چهارم. تصمیم‌گیری: در این مرحله مقدار آمارهٔ آزمون محاسبه شده در مرحله دوم با مقدار بحرانی مرحلهٔ سوم مقایسه می‌شود. چنانچه آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ پذیرش H_0 قرار گیرد، گفته می‌شود که در سطح اطمینان مورد نظر، دلیل کافی برای پذیرش H_0 وجود دارد. در غیر این صورت فرض H_0 رد شده و H_1 در سطح خطای α درصد پذیرفته می‌شود.

تبدیل تصمیم‌گیری آماری به تصمیم‌گیری مدیریتی از دیگر موارد ضروری در این مرحله است. پس از تأیید یا رد H_0، تحلیلگر باید به طور مشخص بیان کند که آیا فرضیه پژوهشی پذیرفته یا رد شده است. بدیهی است محقق هیچ‌گاه ادعای اثبات یا عدم اثبات فرضیه پژوهشی یا فرضیه‌های آماری را ندارد، بلکه در تحلیل خود به لحاظ استقرا رعایت احتیاط را خواهد کرد.

تمرین

۱. رابطهٔ بین سطح معنی‌دار و خطای نوع اول چیست؟
۲. رابطهٔ بین خطای نوع اول و توان آزمون را بیان کنید.
۳. تفاوت آزمونهای یک دنباله با دو دنباله را ذکر کنید.

---

1. critical value

۴. این فرضیه پژوهشی را در نظر بگیرید: «درصد رضایت شغلی در سازمانهای دولتی کمتر از سازمانهای خصوصی است.» و فرضیه‌های آماری آن را بیان کنید.
۵. آیا بیان اثبات فرضیه‌های آماری صحیح است؟ چرا؟

۱۱.۷ آزمون فرض آماری میانگین یک جامعه (μ_x)

اگر فرضیه‌ای در خصوص میانگین یک جامعهٔ آماری طراحی شود با استفاده از مراحل آزمون فرض آماری می‌توان صحت یا سقم فرضیه را در سطح معنی‌دار α تعیین کرد. مراحل چهارگانه آزمون فرض آماری برای μ_x به شرح ذیل است.

۱. **فرضها:** براساس قواعد بیان شده، فرضیه‌های آماری برای میانگین جامعه، صرف نظر از فرضیه پژوهشی یکی از این تعاریف را خواهد داشت:

$$1)\begin{cases} H_0 : \mu_x \le \mu_0 \\ H_1 : \mu_x > \mu_0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} H_0 : \mu_x \ge \mu_0 \\ H_1 : \mu_x < \mu_0 \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_0 \\ H_1 : \mu_x \ne \mu_0 \end{cases}$$

در رابطه‌های فوق H_0 ممکن است نشان‌دهنده ادعا و یا نقیض ادعا باشد. همچنین μ_0 همان میانگین مورد آزمون است.

۲. **آمارهٔ آزمون:** توزیع $\bar{X}$ براساس شرایط تخمین، یکی از توزیعهای Z یا t را خواهد داشت. حال براساس هریک از حالتهای تخمین μ_x، آماره آزمون به این شرح تعریف می‌شود:

۱. وقتی که نمونه از جامعه نرمال با انحراف معیار معلوم انتخاب شود، توزیع $\bar{X}$ صرف‌نظر از حجم نمونه نرمال است و در نتیجه آمارهٔ آزمون، Z خواهد بود که چنین تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \qquad (۱۱.۲)$$

۲. هرگاه نمونه از جامعه‌ای نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شود، توزیع نمونه گیری $\bar{X}$ براساس حجم نمونه به این شرح تعیین می‌شود:

الف) اگر حجم نمونه کوچک باشد ($n \le 30$)، توزیع $\bar{X}$ از t استیودنت برخوردار است و آمارهٔ آزمون عبارت است از:

$$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{\bar{X}}} \qquad (۱۱.۳)$$

ب) در صورتی که حجم نمونه بزرگ باشد ($n > ۳۰$)، توزیع $\bar{X}$ براساس قضیهٔ حد مرکزی از تقریب نرمال برخوردار است و آمارهٔ آزمون آن عبارت است از:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\circ}}{S_{\bar{x}}} \qquad (۱۱\text{-}۴)$$

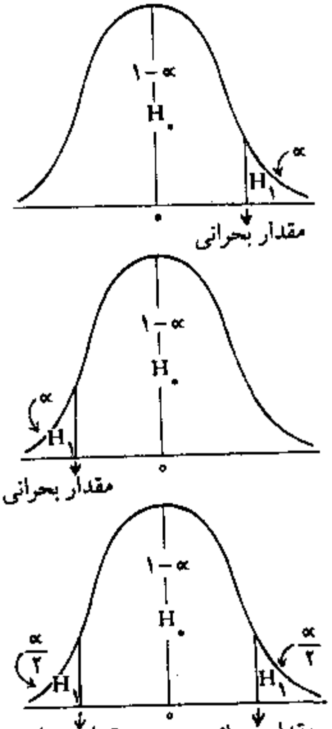
در این حالت همچنین می‌توان براساس تعریف رابطهٔ Z و t از رابطهٔ ۱۱-۳ نیز استفاده کرد.

۳. مقدار بحرانی: در این مرحله محقق پس از تعیین مقدار α و سطح اطمینان، آزمون خود را از نظر یک دنباله و دو دنباله بودن مشخص خواهد کرد. اگرچه نوع آزمون براساس حالتهای مرحلهٔ اول تعریف می‌شود، ولی تعیین مقدار بحرانی (مرز $H_{\circ}$ و H_1) براساس α و نوع آمارهٔ آزمون صورت می‌گیرد که از جدول مربوطه در پیوست کتاب استخراج می‌شود. برای وضوح بیشتر هریک از تعاریف مرحلهٔ اول را به صورت منحنی در شکل ۱۱-۶ نمایش خواهیم داد.

۱) $\begin{cases} H_{\circ}: \mu_x \le \mu_{\circ} \\ H_1: \mu_x > \mu_{\circ} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} H_{\circ}: \mu_x \ge \mu_{\circ} \\ H_1: \mu_x < \mu_{\circ} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} H_{\circ}: \mu_x = \mu_{\circ} \\ H_1: \mu_x \ne \mu_{\circ} \end{cases}$



شکل ۱۱-۶ آزمون یک دنباله و دو دنباله و سطح زیر منحنی $H_{\circ}$ و H_1

حالت اول را آزمون یک دنباله راست و حالت دوم را آزمون یک دنباله چپ و حالت سوم را چنانکه از منحنی آن پیداست دو دنباله می‌گویند. مقادیر بحرانی نیز بر حسب توزیع $\bar{X}$ و نوع آمارهٔ آزمون یا از جدول Z و یا از جدول t استیودنت استخراج می‌شوند.

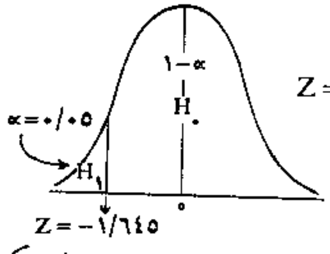
٤. تصمیم‌گیری: در این مرحلهٔ مقدار آمارهٔ آزمون محاسبه شده با مقدار بحرانی مرحله سوم مقایسه می‌شود. اگر آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ پذیرش H_0 قرار گیرد، فرض H_0 در سطح اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد پذیرفته می‌شود. در غیر این صورت داده‌های نمونه دلیل محکمی بر تأیید H_0 ارائه نداده و آن را رد می‌کنند.

مثال ٤-۱۱ فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری مدیران در کشور دست کم ۵۰ است.» محقق برای بررسی فرضیهٔ فوق یک نمونهٔ ٦٤ تایی از بین مدیران کشور به طور تصادفی انتخاب کرده که میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب ٤۵ و ۱٦ است. در سطح خطای ۵ درصد صحت قضیهٔ فوق را بررسی کنید.

براساس مراحل اول و دوم مشخص می‌شود که آزمون از نوع یک دنباله چپ است که آمارهٔ آزمون آن براساس رابطه ٤-۱۱ تعریف می‌شود؛ بنابراین فرضیه‌های آماری و سطح زیر منحنی آنها در سطح خطای ۵ درصد به این ترتیب است:

۱. فرضها: $H_0: \mu_x \geq ۵۰$

$H_1: \mu_x < ۵۰$



۲. آمارهٔ آزمون: $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{\bar{X}}} = \frac{٤۵-۵۰}{\frac{۱٦}{\sqrt{٦٤}}} = -۲/۵$

۳. مقادیر بحرانی: $Z_\alpha = Z_{0/05} = -۱/٦٤۵$

٤. تصمیم‌گیری: پس از مقایسهٔ آمارهٔ آزمون با مقدار بحرانی مشخص می‌شود که آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ H_1 قرار می‌گیرد؛ بنابراین در سطح اطمینان ۹۵ درصد می‌توان گفت که مشاهدات دلالت کافی بر تأیید H_0 ندارد. از آنجا که فرض H_0 بیان کنندهٔ فرضیهٔ پژوهشی است پس در سطح خطای ۵ درصد می‌توان گفت فرضیهٔ پژوهشی

رد می‌شود و نقیض آن؛ یعنی «میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری مدیران در کشور کمتر از ۵۰ است» پذیرفته می‌شود.

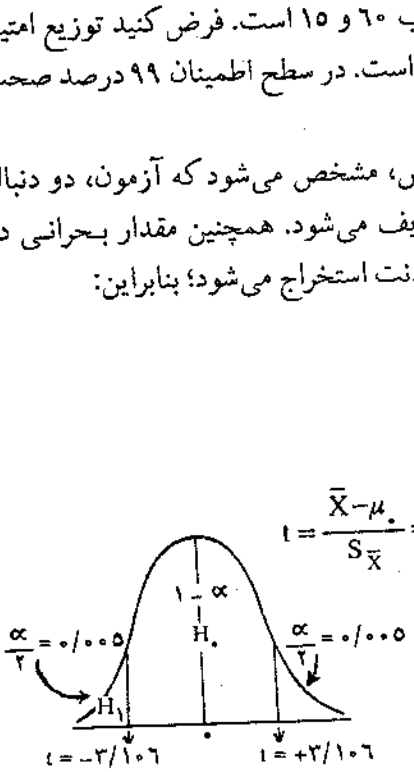
مثال ۵-۱۱ فرضیه‌ای به این صورت توسط یک دانشجوی مدیریت طراحی شده است: «میانگین مهارت ادراکی مدیران سازمان «الف» ۵۵ است.» به منظور بررسی فرضیهٔ فوق، دانشجو از بین مدیران سازمان «الف» یک نمونهٔ تصادفی ۱۲ نفره انتخاب کرده که میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب ۶۰ و ۱۵ است. فرض کنید توزیع امتیاز مهارت ادارکی مدیران سازمان «الف» نرمال است. در سطح اطمینان ۹۹ درصد صحت فرضیهٔ فوق را بررسی کنید.

براساس مرحله اول و دوم آزمون فرض، مشخص می‌شود که آزمون، دو دنباله بوده و آمارهٔ آزمون براساس رابطهٔ ۳-۱۱ تعریف می‌شود. همچنین مقدار بحرانی در سطح خطای ($\frac{\alpha}{2} = 0/005$) از جدول t استیودنت استخراج می‌شود؛ بنابراین:

۱. فرضها: $H_0 : \mu_x = 55$

$H_1 : \mu_x \neq 55$

۲. آماره آزمون: $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} = \dfrac{60 - 55}{\frac{15}{\sqrt{12}}} = 1/155$



۳. مقادیر بحرانی: $t_{0/005,\,11} = \pm 3/106$

۴. تصمیم‌گیری: چون آمارهٔ آزمون ($t = 1/155$) در ناحیهٔ H_0 قرار گرفته است پس فرض صفر در سطح اطمینان ۹۹ درصد پذیرفته می‌شود؛ بنابراین فرضیهٔ پژوهشی دانشجو که به طور مستقیم در H_0 قرار گرفته است تأیید می‌شود.

تمرین

۱. ادعا شده است که میانگین برق مصرفی فروردین ماه یک ناحیهٔ بزرگ تهران دست کم ۱۳۰۰ کیلووات ساعت بوده است. بدین منظور یک نمونهٔ تصادفی به تعداد ۴۰۰ خانوار از منطقه انتخاب شده که میانگین و انحراف معیار برق مصرفی آنها به ترتیب ۱۲۵۲ و ۲۵۷ کیلووات

ساعت است. سطح خطای یک درصد را در نظر گرفته و صحت ادعا را بررسی کنید.

۲. ادعا شده که میانگین زمان تأخیر هواپیماهای مسافربری فرودگاه مهرآباد برای فرود بر روی باند، ۳ دقیقه است. در این زمینه ۷ پرواز به طور تصادفی انتخاب شده که تأخیر آنها برای فرود به این ترتیب است:

x_i : ۱/۵ ، ۲ ، ۲/۵ ، ۳ ، ۵ ، ٤ ، ٤/۵ (زمان بر حسب دقیقه)

توزیع زمان تأخیر برای فرود بر روی باند نرمال است. ادعای فوق را در سطح خطای یک درصد محاسبه کنید.

۳. حسابرسی ادعا کرده که میانگین ماندهٔ حسابهای بدهکاران شرکت «ب» ٤۵۰ هزار تومان است. به منظور بررسی این ادعا یک نمونهٔ ۱۰ تایی از حسابهای بدهکاران شرکت انتخاب شده که میانگین آن ٤۰۰ هزار تومان و انحراف معیارش ۲۰ هزار تومان است. توزیع مانده حسابهای بدهکاران شرکت نرمال است. محاسبه کنید آیا می‌توان ادعا را در سطح خطای ۵ درصد پذیرفت؟

٤. در فرضیه‌ای چنین بیان شده است: «میانگین بلوغ روانی کارمندان سازمان «الف» حداکثر ٦۰ است.» برای بررسی فرضیهٔ فوق یک نمونهٔ تصادفی ۸۱ نفره از بین کارمندان سازمان «الف» انتخاب شده که از نظر بلوغ روانی امتحان شده‌اند. میانگین بلوغ روانی آنها ٦۸ و انحراف معیار نمرهٔ امتحان ۲۰ شده است. سطح خطای ۲ درصد را در نظرگرفته و فرضیهٔ پژوهشی را آزمون کنید.

۸-۱۱ آزمون مقایسهٔ میانگین دو جامعهٔ آماری

بخش اعظم فرضیه‌های پژوهشی در مدیریت و علوم رفتاری به منظور مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری انجام می‌گیرند. این نوع فرضیه‌ها را «فرضیه‌های تطبیقی[1]» گویند. برای آزمون این نوع فرضیه‌ها (چنانچه میانگین‌پذیر باشند) و تعیین صحت و سقم آنها می‌توان از مراحل آزمون فرض آماری برای میانگین دو جامعه استفاده کرد. مراحل آزمون به ترتیب شرح داده می‌شود.

۱. فرضها: فرضیه‌های آماری، برگرفته از فرضیه پژوهشی و نقیض آن هستند. با توجه به فرضیهٔ پژوهشی و نقیض آن، فرضیه‌های آماری یکی از این تعاریف را خواهند داشت:

1. comparative

$$1)\begin{cases} H_0 : \mu_1 \le \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} H_0 : \mu_1 \ge \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \ne \mu_2 \end{cases}$$

۲. آمارهٔ آزمون: به خاطر داریم که $\mu_1-\mu_2$ از آمارهٔ ناااریب $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ برخوردار است. توزیع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ به شرایط تخمین تفاضل میانگین دو جامعه بستگی دارد که به این صورت تفکیک پذیر است:

۱. وقتی نمونه‌ها از دو جامعهٔ نرمال با انحراف معیار معلوم انتخاب شوند، توزیع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ نرمال بوده و آمارهٔ آزمون عبارت است از:

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (۱۱\text{-}۵)$$

۲. وقتی نمونه‌ها از دو جامعهٔ نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شوند، توزیع نمونه گیری آماره به n_1+n_2-2 به شرح ذیل بستگی خواهد داشت.

الف) اگر درجهٔ آزادی کوچکتر از ۳۰ باشد، توزیع نمونه گیری آماره t استیودنت است. خطای استاندارد در این حالت تحت تأثیر فرض تساوی و عدم تساوی واریانس دو جامعه متفاوت خواهد بود. به طوری که اگر $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ باشد، آمارهٔ آزمون عبارت است از:

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \qquad (۱۱\text{-}۶)$$

توزیع t در این حالت دارای درجهٔ آزادی $d.f=n_1+n_2-2$ خواهد بود. S_p همان واریانس مشترک است که در قسمت ۲-۳-۱۰ تعریف شد.

اگر فرض $\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$ پذیرفته شود؛ درجهٔ آزادی براساس رابطهٔ ۷-۱۱ و آمارهٔ آزمون براساس رابطهٔ ۸-۱۱ تعریف می‌شود.

$$d.f' = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{S_1^2}{n_1})^2}{n_1-1}+\frac{(\frac{S_2^2}{n_2})^2}{n_2-1}} \qquad (11\text{-}7)$$

$$t' = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad (11\text{-}8)$$

ب) اگر درجهٔ آزادی بزرگتر از ۳۰ باشد، آماره آزمون چنین تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad (11\text{-}9)$$

براساس قضیهٔ حد مرکزی در نمونه‌های بزرگ تقریب $Z \approx t$ برقرار است؛ بنابراین می‌توان از هریک از رابطه‌های ۱۱ـ۶ و ۱۱ـ۸ به جای رابطهٔ ۱۱ـ۹ استفاده کرد.

۳. مقدار بحرانی: سطح زیر منحنی بر حسب نوع آزمون، α و توزیع نمونه گیری $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ تعریف می‌شود؛ بنابراین برحسب فرضیه‌های آماری در مرحلهٔ اول، سطح زیر منحنی در حالتهای مختلف به شکل ۱۱ـ۷ خواهد بود.

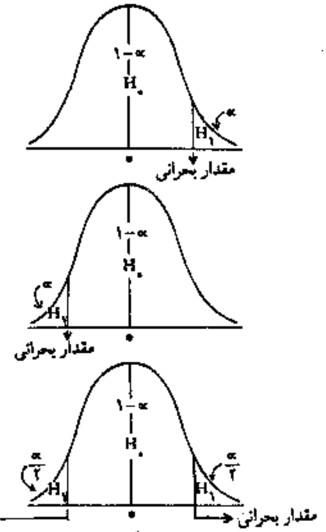
حالتهای اول و دوم از نوع آزمونهای یک دنباله و حالت سوم آزمون دو دنباله است. مقدار بحرانی براساس آمارهٔ آزمون و مقدار α از جدول t یا Z استخراج خواهد شد.

٤. تصمیم‌گیری: مقایسهٔ مقدار بحرانی و آمارهٔ آزمون مشخص خواهد کرد که آیا H_0 تأیید یا رد می‌شود. چنانچه آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ H_0 قرار گیرد، H_0 در سطح اطمینان دلخواه تأیید شده، در غیر این صورت رد می‌گردد. پس از تأیید یا رد H_0، محقق به تبیین رد یا تأیید فرضیهٔ پژوهشی خود خواهد پرداخت.

۱) $\begin{cases} H_0: \mu_1 \le \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} H_0: \mu_1 \ge \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \ne \mu_2 \end{cases}$



شکل ۱۱.۷ سطح زیر منحنی H_0 و H_1 در سطح خطای ∝

مثـال ۱۱.۶ تحقیقی برای مقایسهٔ روش آموزش متمرکز مدیران با روش غیرمتمرکز آنان در دست برنامه‌ریزی است؛ بدین منظور فرضیه‌ای به این صورت بیان شده‌است: «روش آموزش متمرکز برای مدیران بهتر از روش غیرمتمرکز است.» ملاک سنجش فرضیهٔ فوق مقایسهٔ میانگین نمره‌های مدیرانی است که به روش متمرکز و غیرمتمرکز آموزش دیده‌اند. چون به تمام مدیران آموزش دیده دسترسی نبوده، به نمونه‌هایی از هر گروه اکتفا شده‌است. بررسیها نشان می‌دهد که توزیع نمره‌ها در هر دسته نرمال است. اطلاعات حاصل از نمونه‌ها به این شرح است:

روش متمرکز	روش غیرمتمرکز
$n_1 = ۱۰$	$n_2 = ۱۵$
$\bar{X}_1 = ۵۲$	$\bar{X}_2 = ۴۵$
$S_1 = ۱۲$	$S_2 = ۸$

فرض تساوی واریانس دو جامعه را پذیرفته و صحت فرضیه را در سطح خطای یک درصد محاسبه کنید.

براساس مراحل اول تا سوم مشخص می‌شود که توزیع نمونه‌گیری آماره، t استیودنت است و چون واریانس نمره‌ها در دو سیستم آموزش مساوی است، پس آمارهٔ آزمون براساس رابطهٔ ۱۱.۶ تعریف خواهد شد. همچنین آزمون، یک آزمون یک دنباله است که تبیین آماری و منحنی آن به این شرح است:

۱. فرضها:

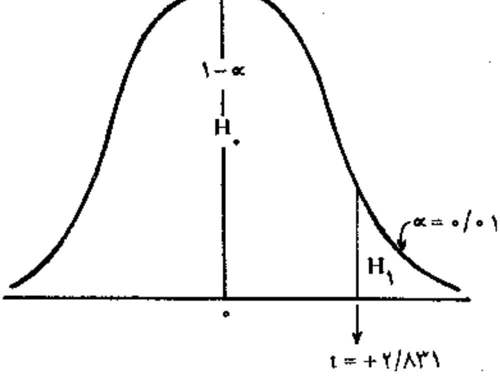
(از نظر اثر بخشی روش آموزش متمرکز بهتر از روش غیرمتمرکز نیست.) $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$

(از نظر اثربخشی روش آموزش متمرکز بهتر از روش غیرمتمرکز است.) $H_1: \mu_1 > \mu_2$

$$S_P = \sqrt{\frac{(n_1-۱)S_1^2+(n_2-۱)S_2^2}{n_1+n_2-۲}} = \sqrt{\frac{(۱۰-۱)(۱۲)^2+(۱۵-۱)(۸)^2}{۱۰+۱۵-۲}} = ۹/۷۶۲$$

۲. آماره آزمون: $t = \dfrac{(۵۲-۴۵)-۰}{۹/۷۶۲\sqrt{\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}}} = ۱/۷۵۷$

۳. مقادیر بحرانی: $t_{\alpha\, d.f} = t_{۰/۰۱,\ ۲۳} = ۲/۸۳۱$



۴. تصمیم‌گیری: آمارهٔ آزمون (t = ۱/۷۵۷) در مقایسه با مقدار بحرانی (t = ۲/۸۳۱) در ناحیهٔ H_0 قرار می‌گیرد؛ بنابراین، فرض H_0 در سطح خطای یک درصد پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرضیهٔ پژوهشی تحقیق، رد شده و نقیض آن تأیید می‌گردد. چون H_0 نشان‌دهنده نقیض ادعا و H_1 نشان‌دهندهٔ فرضیه پژوهشی (ادعا) است.

۹-۱۱ آزمون مقایسهٔ زوجها

در بخش ۸-۱۱ فرض اساسی این بود که میانگینها و نمونه‌های هر گروه مستقل از یکدیگر

هستند. روشی که برای ارزشیابی پیش‌آزمون[1] و پس‌آزمون[2] به کار می‌رود، روشی است که در آن از مشاهدات مربوط به نمونه‌های غیرمستقل استفاده می‌کنند. آزمون فرضیه‌ای که بر مبنای این نوع داده‌ها قرار دارد به «آزمون مقایسهٔ زوجها»[3] معروف است.

بسیار اتفاق می‌افتد که تفاوت واقعی بین دو جامعه نسبت به متغیر مورد نظر وجود ندارد، ولی وجودِ منابع خارجیِ پراکندگی ممکن است سبب رد فرضیهٔ H_0 بشود. از طرف دیگر ممکن است تفاوتهای واقعی با وجود عوامل خارجی پوشیده گردد. هدف از آزمون مقایسهٔ زوجها این است که با تشکیل زوجهای شبیه به هم نسبت به متغیر مورد نظر حداکثر تعداد منابع خارجی پراکندگی را تا آنجا که امکان دارد از بین برد. در این گونه موارد به جای آنکه تجزیه و تحلیل را به کمک مشاهدات فردی انجام دهیم، تفاوت بین زوج مشاهدات فردی را به عنوان متغیر مورد بررسی به کار می‌بریم.

ساختار ذیل نشان‌دهندهٔ مشاهدات در یک مقایسهٔ زوجی است که در آن X و Y به ترتیب نمایشگر پاسخهای رفتار[4] ۱ و ۲ هستند. تفاضل بین پاسخها در هر زوج در ستون آخر ثبت شده‌است. در این نوع آزمون، رفتار ۲ را همیشه y و رفتار ۱ را X می‌دانیم و d_i (تفاضل) نیز همیشه با y_i-x_i بیان می‌شود.

جدول ۱۱.۳ ساختار آزمون مقایسهٔ زوجها

زوج	رفتار ۱ (x_i)	رفتار ۲ (y_i)	تفاضل $d_i = y_i - x_i$
۱	x_1	y_1	$d_1 = y_1 - x_1$
۲	x_2	y_2	$d_2 = y_2 - x_2$
۳	x_3	y_3	$d_3 = y_3 - x_3$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n	$d_n = y_n - x_n$

مفروضات آزمون زوجها عبارتند از:

الف) هر زوج (x_i و y_i) مستقل از زوج دیگری است.

1. pre test
2. post test
3. paires test
4. treatment

ب) متغیر مورد مطالعه از مقیاس نسبی یا فاصله‌ای برخوردار است.

ج) توزیع تفاوتها در جامعهٔ مشاهدات دوتایی همبسته، نرمال یا از تقریب نرمال برخوردار است.

ستون d_i نشان‌دهندهٔ نمونهٔ زوجی n تایی است که به نوعی $Cov(X,Y)$ را در خود دارد. حال آزمون مناسب را همانند مراحل آزمون μ_x می‌توان به عمل آورد. با این تفاوت که در این بخش آماره‌ها و پارامترها از نماد d برخوردارند. جدول ۱۱ـ۴ به معرفی آماره‌ها و پارامترهای مورد نیاز برای این آزمون خاص می‌پردازد.

جدول ۱۱ـ۴ معرفی آماره‌ها و پارامترهای آزمون مقایسهٔ زوجها

پارامتر	آماره
$\mu_d = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N}$	$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$
$\sigma_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (d_i - \mu_d)^2}{N}$	$S_d^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}$
$\sigma_{\bar{d}}^2 = \frac{\sigma_d^2}{n}$	$S_{\bar{d}}^2 = \frac{S_d^2}{n}$

آمارهٔ آزمون از نوع t است که با فرض مجهول‌بودن σ_d عبارت است از:

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{S_{\bar{d}}} \qquad (11\text{-}10)$$

در این بخش از ذکر مراحل چهارگانهٔ آزمون فرض به دلیل شباهت آن با آزمون μ_x خودداری کرده، با ذکر مثال آن را شرح می‌دهیم. نکتهٔ قابل توجه در آمارهٔ آزمون این است که H_0 همیشه قید $\geq$ ، $\leq$ یا $=$ با صفر (عدم اختلاف میانگین زوجها) را خواهد داشت.

مثال ۱۱ـ۷ به منظور مقایسهٔ جو سازمانی در وضعیت موجود و وضعیت مطلوب، فرضیه‌ای به‌این صورت بیان شده است: «جو سازمانی موجود با جو سازمانی در وضعیت

مطلوب اختلاف نامناسبی دارد.» برای بررسی فرضیه از پنج مدیر سازمانی که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند، خواسته شده است که ضمن ارزشگذاری وضع مطلوب جو سازمانی برای سازمان، نمرهٔ وضع موجود جو سازمانی را نیز بیان کنند. خلاصه امتیازات حاصل از شاخصهای جو سازمانی در وضعیت مطلوب و موجود به این ترتیب است:

مدیر	۱	۲	۳	٤	٥
نمره وضع مطلوب (x_i)	٥٠	٥٩	٥٠	٥٨	٥٠
نمرهٔ وضع موجود (y_i)	٤٠	٥٧	٤٧	٥٠	٤٨

فرض نرمال بودن برای نمره‌های جو سازمانی در هر دو وضعیت پذیرفتنی است. صحت فرضیه پژوهشی را در سطح خطای ٥ درصد بررسی کنید.

۱. فرضها: اگر میانگین کل زوجهای جامعهٔ آماری (که در اینجا نمره‌های کلیه مدیران است) کمتر از صفر باشد، می‌توان گفت بین جو سازمانی در وضع موجود با وضع مطلوب شکاف نامناسب وجود دارد؛ بنابراین فرضیه پژوهشی و نقیض آن به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} H_0: & \mu_d \geq 0 \quad \text{نقیض ادعا} \\ H_1: & \mu_d < 0 \quad \text{ادعا} \end{cases}$$

فرضیه پژوهشی به علت نداشتن تساوی در H_1 قرار گرفته و نقیض آن در H_0 آمده است.

۲. آمارهٔ آزمون: گفته شد که آمارهٔ $\bar{d}$ از توزیع t استیودنت برخوردار است. در حالی که اگر $\sigma_{\bar{d}}$ برای نمره‌های زوجها مشخص باشد می‌توان از توزیع نرمال (متغیر استاندارد Z)، استفاده کرد. از آنجا که توزیع t هم برای $n<30$ و هم برای $n\geq 30$ سازگار است، پس تنها آمارهٔ آزمون عبارت است از:

$$t = \frac{\bar{d}}{S_{\bar{d}}}$$

حال به محاسبهٔ اجزای آمارهٔ آزمون می‌پردازیم:

زوج	۱	۲	۳	٤	٥	
x_i	٥٠	٥٩	٥٠	٥٨	٥٠	
y_i	٤٠	٥٧	٤٧	٥٠	٤٨	
d_i	$-$۱۰	$-$۲	$-$۳	$-$۸	$-$۲	$\Sigma d_i = -$۲٥
$(d_i - \bar{d})^۲$	۲٥	۹	٤	۹	۹	$\Sigma (d_i - \bar{d})^۲ =$ ٥٦

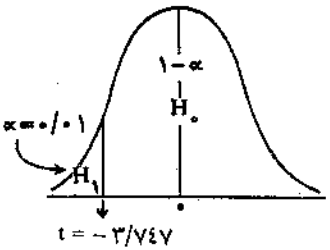
$$\bar{d} = \frac{\Sigma d_i}{n} = \frac{-۲٥}{٥} = -٥$$

$$S_d^۲ = \frac{\Sigma (d_i - \bar{d})^۲}{n-۱} = \frac{٥٦}{٥-۱} = ۱٤ \Rightarrow S_d = ۳/۷٤۲$$

$$t = \frac{-٥}{\frac{۳/۷٤۲}{\sqrt{٥}}} = -۲/۹۸۸$$ آمارهٔ آزمون: ۲/۹۸۸−

۳. مقدار بحرانی: آزمون از نوع یک دنبالهٔ چپ است که با توجه به $\alpha = ۰/۰۱$، منحنی آن به این صورت است:

$$\begin{cases} \alpha = ۰/۰۱ \\ d.f = n-۱ = ٥-۱ = ٤ \end{cases} \Rightarrow t_{۰/۰۱\,,\,٤} = -۳/۷٤۷$$



مقدار بحرانی براساس جدول t استیودنت با خطای یک درصد و درجهٔ آزادی ٤ مساوی ۳/۷٤۷− است.

٤. تصمیم‌گیری: آمارهٔ آزمون ($t = -۲/۹۸۸$) در مقایسه با مقدار بحرانی در ناحیهٔ $H_۰$ قرار می‌گیرد؛ بنابراین فرض $H_۰$ در سطح خطای یک درصد پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرضیهٔ پژوهشی رد شده، نقیض آن تأیید می‌گردد.

تمرین

۱. در مطالعهٔ حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ، نمونه‌های تصادفی مرکب از ۱۵۰ کارمند متخصص به طور مستقل از دو بخش مهندسی و حسابداری انتخاب شده‌اند. اطلاعات مربوط به حقوق این کارکنان به این صورت به دست آمده است:

بخش مهندسی	بخش حسابداری
$n_2 = ۱۵۰$	$n_1 = ۱۵۰$
$\bar{X}_2 = ۳۹۲۱۲$ تومان	$\bar{X}_1 = ۳۷۲۵۰$ تومان
$S_2 = ۵۳۵۶$ تومان	$S_1 = ۵۵۴۱$ تومان

سطح خطای ۲ درصد را در نظر گرفته، فرضیهٔ ذیل را آزمون کنید: «بین میانگین حقوق کارمندان بخش حسابداری و مهندسی تفاوتی دیده نمی‌شود.»

۲. یک تحلیلگر عملیات می‌خواهد برای بهبود وضع مصرف بنزین، تفاضل میانگین طول عمر عاج لاستیک یک نوع تایر اتومبیل خاص را در حالتی که فشار باد تایر به صورت استاندارد و یا بیشتر از حد استاندارد است برآورد کند. دو نمونهٔ مستقل، مرکب از ۱۵ تایر از خط تولید انتخاب کرده است. تایرهای نمونه اول را با فشار باد استاندارد و تایرهای نمونهٔ دوم را با فشار باد بیش از حد استاندارد تنظیم و عمر عاج لاستیک تمام تایرها را آزمایش کرده است. نتایج عمر عاج لاستیک بر حسب هزار کیلومتر در زیر آمده است (حجم نمونهٔ اول ۱۴ = n_1 است؛ زیرا یکی از تایرها معیوب بوده و نتوانسته‌اند روی آن آزمایش مربوط را انجام دهند).

فشار باد زیاد	فشار باد استاندارد
$n_2 = ۱۵$	$n_1 = ۱۴$
$\bar{X}_2 = ۴۰/۷$	$\bar{X}_1 = ۴۳$
$S_2 = ۱/۳$	$S_1 = ۱/۱$

فرض کنید هر دو جامعه توزیع نرمال با واریانس مساوی دارند.

الف) تفاوت میانگینهای عمر عاج لاستیک برای دو نوع فشار تایر، $\mu_1 - \mu_2$، را با استفاده از یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برآورد کرده، فاصله اطمینان حاصل را تفسیر کنید.

ب) آیا می‌توان با استفاده از آزمون فرض آماری نتایج بند الف را گرفت؟

۳. فرضیه تحقیقی چنین است: «در میان مدیران عالی به مهارت ادراکی بیشتر از مهارت فنی نیاز است.»

محققی برای بررسی فرضیه فوق ۱۰ مدیر را به طور تصادفی انتخاب کرده و از هر یک تست تعیین نیاز به مهارت ادراکی و فنی به عمل آورده است. نتایج در این جدول آمده است:

مدیر	۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰
مهارت ادراکی	۸۰	۷۰	۷۵	٦۵	۸۲	۸۸	٦۷	۵۷	۹۰	۹۲
مهارت فنی	۵۰	٦۵	۷۰	۷۵	۸۰	۷۵	٦٦	۵۰	۸۰	۹۰

با فرض نرمال بودن توزیع نیاز در هر دو نوع مهارت، صحت فرضیه را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

٤. ادعا شده که یک برنامهٔ ایمنی صنعتی در کاهش تضییع ساعات کارِ ناشی از نقص در ماشینهای کارخانه مؤثر است. داده‌های زیر مربوط به ضایع شدن ساعتهای کار هفتگی به واسطهٔ نقص در ٦ دستگاه است که یکی قبل و دیگری بعد از اجرای برنامهٔ ایمنی جمع‌آوری شده است:

دستگاه	۱	۲	۳	٤	۵	٦
قبل	۱۲	۲۹	۱٦	۳۷	۲۸	۱۵
بعد	۱۰	۲۸	۱۷	۳۵	۲۵	۱٦

مفروضات لازم را بیان‌کرده، سپس تعیین‌کنید که آیا داده‌ها از ادعای فوق حمایت می‌کنند؟ چرا؟

۱۰-۱۱ آزمون فرض نسبت موفقیت در جامعه (p)

فرضیه‌های تحقیق در مدیریت گاهی نسبت پذیرند؛ فرضیه‌های مربوط به تحقیقات با مقیاس کیفی با استفاده از آزمون نسبت موفقیت مورد ادعا بررسی می‌شوند. چنانچه یک فرضیه پژوهشی با p بیان شود، می‌توان صحت آن فرضیه را با استفاده از مراحل چهارگانه آزمون فرض بررسی کرد. مراحل آزمون فرض p عبارتند از:

۱. فرضها: فرضیه‌های آماری با توجه به نوع فرضیه پژوهشی در قالب یکی از این حالتها تبیین می‌شوند:

$$۱)\begin{cases} H_0 : p \leq p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases} \qquad ۲)\begin{cases} H_0 : p \geq p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \qquad ۳)\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

چنانکه دیده می‌شود، قاعدهٔ بر خوردار بودن H_0 از تساوی در اینجا نیز برقرار است. در

این راستا، H_0 ممکن است بیان‌کنندهٔ فرضیه پژوهشی یا نقیض آن باشد.

۲. آمارهٔ آزمون: براساس جدول ۱ـ۱۱ و تخمین گفته شد، آنچه در توزیع نمونه گیری $\overline{p}$، نرمال است و آمارهٔ آزمون به این صورت تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \qquad (۱۱ـ۱۱)$$

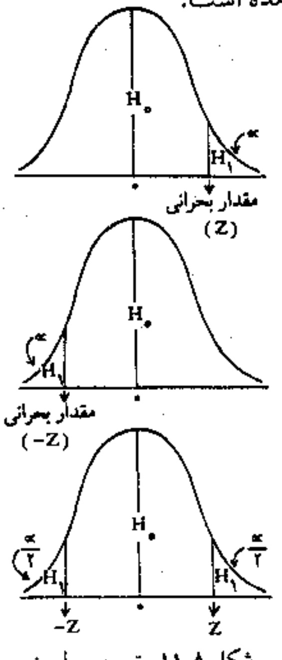
در رابطه فوق p_0، نسبت مورد آزمون و مخرج متغیر Z همان $\sigma_{\overline{p}}$ است.

۳. مقدار بحرانی: سطح زیر منحنی H_0 و H_1 در توزیع نرمال تحت تأثیر فرضیه‌های آماری در مرحله اول است. سطح زیر منحنی بسته به نوع آزمون به صورت ذیل بین H_0 و H_1 تقسیم می‌شود. منتهی براساس دلایل بیان شده H_0 دربرگیرنده $(1-\alpha)100$ درصد و H_1 سطحی برابر 100α درصد خواهد داشت. طبیعی است مقدار بحرانی باید از جدول استاندارد Z بر حسب مقدار α استخراج شود. علامت مقدار بحرانی به نوع آزمون (یک دنباله راست، یک دنباله چپ و دو دنباله) بستگی دارد. منحنی توضیحات فوق در شکل ۸ـ۱۱ آمده است.

۱) $\begin{cases} H_0 : p \le p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} H_0 : p \ge p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \ne p_0 \end{cases}$



شکل ۸ـ۱۱ تعیین سطح زیر منحنی H_0 و H_1 برای آزمون نسبت موفقیت جامعه

٤. تصمیم‌گیری: در این مرحله طبق معمول مقدار آمارهٔ آزمون که از رابطه ۱۱-۱۱ به دست آمده است با مقدار بحرانی مقایسه می‌شود. چنانچه آمارهٔ آزمون در ناحیه H_0 قرار گیرد، گفته می‌شود که شواهد تجربی کافی در سطح اطمینان مورد نظر برای تأیید H_0 وجود دارد، در غیر این صورت فرض H_0 رد می‌شود.

مثال ۸-۱۱ فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «شصت درصد مدیران کشور از سبک S_1 برخوردارند.» تحلیلگری برای بررسی فرضیه فوق یک نمونهٔ ۲۰۰ تایی از بین مدیران کشور انتخاب کرده‌است که نیمی از آنها از سبک S_1 برخوردارند. در سطح خطای ۵ درصد صحت فرضیهٔ فوق را بررسی کنید.

با توجه به مراحل آزمون فرض p ، فرضیه‌های آماری، سطح زیرمنحنی فرضیه‌های آماری، آمارهٔ آزمون و مقدار بحرانی به صورت زیر به دست آمده‌اند:

۱. فرضها:

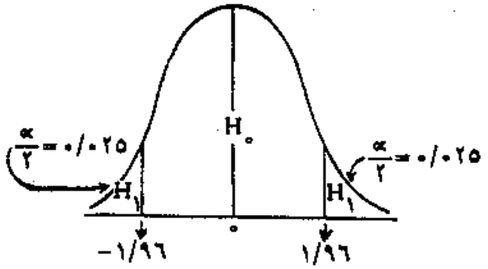
$$\begin{cases} H_0: p = \%۶۰ & \text{ادعا} \\ H_1: p \neq \%۶۰ & \text{نقیض ادعا} \end{cases}$$

۲. آمارهٔ آزمون:

$$Z = \frac{۰/۵ - ۰/۶۰}{\sqrt{\frac{۰/۶۰ \times ۰/۴۰}{۲۰۰}}} = -۲/۸۹$$

۳. مقادیر بحرانی:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{۰/۰۲۵} = \pm ۱/۹۶$$



٤. تصمیم‌گیری: آمارهٔ آزمون ($Z = -۲/۸۹$) در ناحیهٔ چپ H_1 قرار می‌گیرد؛ بنابراین در سطح اطمینان ۹۵ درصد می‌توان گفت که فرضیهٔ پژوهشی پذیرفته نمی‌شود. همچنین قرار گرفتن آمارهٔ آزمون در دنبالهٔ چپ H_1 نشان می‌دهد که نه تنها نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 مساوی ۶۰ درصد نیست بلکه کمتر از آن هم هست.

۱۱ـ۱۱ آزمون فرض مقایسهٔ نسبت موفقیت در دو جامعهٔ آماری

اگر فرضیه‌ای پژوهشی در خصوص مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری با استفاده از داده‌های کیفی وجود داشته باشد می‌توان به مقایسهٔ آن دو جامعه با استفاده از تفاضل نسبت موفقیت، $p_1 - p_2$، پرداخت. صحت چنین فرضیه‌هایی با استفاده از آزمون مقایسهٔ p_1 و p_2 امکانپذیر است.

مراحل چهارگانهٔ آزمون مقایسهٔ نسبتها، کاملاً شبیه بخش ۱۰ـ۱۱ است؛ بنابراین از ذکر جزئیات آن خودداری می‌شود. تنها تفاوت در تعریف آمارهٔ آزمون است. آمارهٔ آزمون از نوع Z است که به صورت رابطهٔ ۱۲ـ۱۱ تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}}} \qquad (11\text{-}12)$$

واضح است که فرض H_0 بیان‌کننده ≤ ، ≥ یا = است. پس براحتی می‌توان گفت که $p_1 - p_2$ مساوی صفر است؛ بنابراین گاهی در رابطهٔ ۱۲ـ۱۱ عبارت $p_1 - p_2$ قید نمی‌شود و همچنین گاهی مخرج آمارهٔ آزمون براساس $\bar{p}$ مشترک دو نمونه تعریف می‌شود. $\bar{p}$ مشترک عبارت است از:

$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \qquad (11\text{-}13)$$

X_1 تعداد موفقیت در n_1 و X_2 تعداد موفقیت در n_2 است. حال می‌توان رابطهٔ ۱۲ـ۱۱ را به صورت ۱۴ـ۱۱ نیز بیان کرد:

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad (11\text{-}14)$$

مثال ۹ـ۱۱ فرضیهٔ یکی از پایان‌نامه‌های مدیریت به این شرح است: «انگیزهٔ توفیق‌طلبی در بین دانشجویان شهرستانی و تهرانی به یک اندازه است.» برای بررسی فرضیهٔ فوق از هر گروه، نمونه‌هایی انتخاب شده که خلاصهٔ اطلاعات آنها در جدول ذیل آمده است:

گروه دانشجویی \ میزان توفیق طلبی	بالا	پایین	مجموع
شهرستانی	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰
تهرانی	۲۵۰	۱۵۰	٤۰۰

در سطح خطای یک درصد صحت فرضیهٔ فوق را بررسی کنید.

مقیاس توفیق‌طلبی یک مقیاس رتبه‌ای است؛ بنابراین یکی از پارامترهای مناسب برای بررسی چنین فرضیه‌ای استفاده از نسبت موفقیت است. چون بحث مقایسهٔ دو جامعهٔ آماری (شهرستانی و تهرانی) مطرح است؛ بنابراین از آزمون مقایسهٔ $p_۱$ و $p_۲$ باید استفاده کرد. فرضیه‌های آماری، منحنی، آمارهٔ آزمون و مقدار بحرانی فرضیهٔ فوق برای رسیدن به یک تصمیم معتبر به این ترتیب بیان می‌شود:

۱. فرضها:
ادعا: $H_۰ : p_۱ = p_۲$
نقیض ادعا: $H_۱ : p_۱ \neq p_۲$

۲. آمارهٔ آزمون:

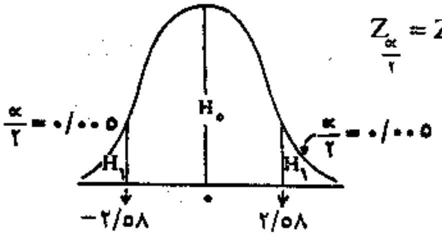
برای محاسبهٔ $\overline{p}_۱$ و $\overline{p}_۲$ در رابطه ۱۲ـ۱۱ ما موفقیت را تعداد دانشجویان برخوردار از انگیزهٔ توفیق‌طلبی بالا می‌دانیم؛ بنابراین داریم:

$$\overline{p}_۱ = \frac{X_۱}{n_۱} = \frac{۲۰۰}{۳۰۰} = ۰/٦٦٧$$

$$\overline{p}_۲ = \frac{X_۲}{n_۲} = \frac{۲٥۰}{٤۰۰} = ۰/٦۲٥$$

$$Z = \frac{(۰/٦٦٧ - ۰/٦۲٥)}{\sqrt{\frac{۰/٦٦٧\,(۰/۳۳۳)}{۳۰۰} + \frac{۰/٦۲٥\,(۰/۳۷٥)}{٤۰۰}}} = ۱/۱٥٤$$

۳. مقادیر بحرانی: $Z_{\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۰۰٥} = \pm ۲/٥۸$



٤. تصمیم‌گیری: مقدار آمارهٔ آزمون ($Z = ۱/۱۵٤$) در ناحیهٔ H_0 قرار می‌گیرد؛ بنابراین فرضیهٔ پژوهشی در سطح خطای یک درصد تأیید می‌شود.

تمرین

۱. ادعا شده است که «سطح آمادگی کارمندان سازمان «الف» از کارمندان سازمان «ب» بالاتر است.» برای بررسی این ادعا، از بین کارمندان سازمان «الف» یک نمونهٔ ۱۰۰ تایی انتخاب شده‌است که ٦۰ نفر از آنها از سطح آمادگی بالا برخوردارند. در حالی که فقط نیمی از یک نمونهٔ تصادفی ۲۰۰ تایی ازکارمندان سازمان «ب» از سطح آمادگی بالا برخوردارند. در سطح خطای ۵ درصد صحت ادعای فوق را آزمون کنید.

۲. ادعا شده‌است که وضع بهداشتی خوابگاههای دانشجویی نامناسب است. بدین منظور یک نمونهٔ تصادفی ۱۵۰ نفره از بین دانشجویان به طور تصادفی انتخاب شده‌است که ۵۰ نفر از آنها از وضع بهداشت خوابگاهها شکایت داشته‌اند. در سطح خطای ۲ درصد محاسبه کنید آیا می‌توان گفت ادعای فوق درست است؟

۳. در یک تحقیق هدف، مقایسهٔ نظر واردکنندگان و صادرکنندگان کالا در خصوص مقررات گمرکی است. برای انجام این تحقیق پرسشنامه‌ای طراحی و به نمونه‌هایی از هر دو گروه داده شده است تا به سؤالات پاسخ دهند. ۸۰ نفر از یک نمونهٔ ۱۰۰ تایی صادرکنندگان معتقدند که مقررات گمرکی دست و پاگیر است. در حالی که فقط ۷۰نفر از ۱۰۰ نفر انتخاب شده از بین واردکنندگان چنین اعتقادی دارند. آیا می‌توان در سطح خطای ۵ درصد ادعا کرد که واردکنندگان و صادرکنندگان دربارهٔ مقررات گمرکی هم عقیده هستند؟ محاسبات لازم را انجام دهید.

۱۲-۱۱ آزمون فرض آماری برای واریانس جامعه

هرگاه فرضیه‌ای دربارهٔ پراکندگی جامعه وجود داشته باشد، صحت یا سقم آن را می‌توان با استفاده از مراحل آزمون فرض به شرح ذیل بررسی کرد.

۱. فرضها: براساس نوع فرضیه پژوهشی، فرضیه‌های آماری یکی از این تعاریف را خواهند داشت:

$$۱)\begin{cases}H_0: \sigma_x^2 \le \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 > \sigma_0^2\end{cases} \qquad ۲)\begin{cases}H_0: \sigma_x^2 \ge \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 < \sigma_0^2\end{cases} \qquad ۳)\begin{cases}H_0: \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 \ne \sigma_0^2\end{cases}$$

که در حالتهای فوق σ_0^2، واریانس مورد آزمون است.

۲. آمارهٔ آزمون: از بحث تخمین به یاد داریم که آمارهٔ σ_x^2، واریانس نمونه S_x^2 است. توزیع نمونه گیری S_x^2 در صورتی که از یک جامعهٔ نرمال نمونه انتخاب شده باشد، یک توزیع χ^2 است که آمارهٔ آزمون آن به این صورت تعریف می‌شود:

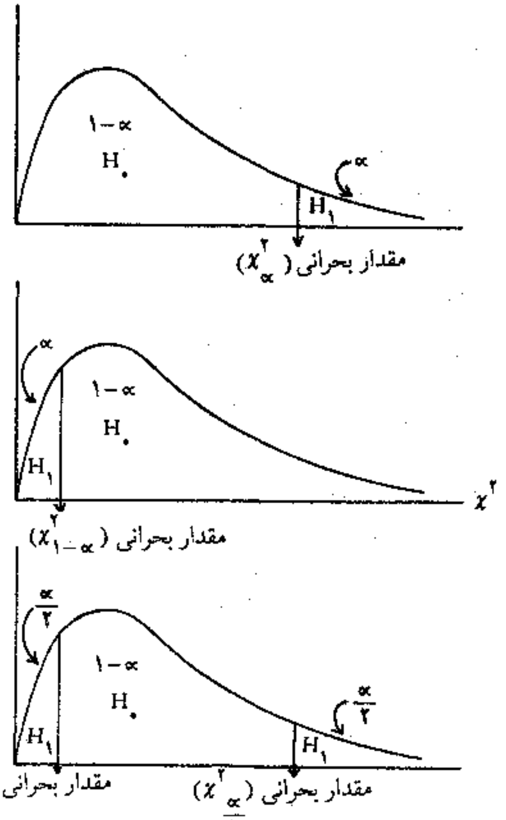
$$\chi^2 = \frac{(n-1)\,S_x^2}{\sigma_0^2} \qquad (۱۱\text{-}۱۵)$$

۳. مقدار بحرانی: سطح زیرمنحنی فرضیه‌های آماری بر حسب مقدار α بر روی توزیع χ^2 مشخص می‌شود. آنچه مسلم است براساس قاعدهٔ کلی، H_0 دربرگیرنده سطح اطمینان و H_1 دربرگیرندهٔ سطح خطا، α، است. منحنی هریک از حالتهای مرحلهٔ اول در شکل ۹-۱۱ آمده است.

۱) $\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 \le \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 \ge \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 \ne \sigma_0^2 \end{cases}$



شکل ۹-۱۱ سطح زیر منحنی H_0 و H_1 برای واریانس جامعه

حالت اول نشان‌دهندهٔ یک آزمون یک دنباله راست است که مقدار بحرانی آن براساس α و درجهٔ آزادی، $d.f = n-1$، تعیین می‌شود. حالت دوم آزمون یک دنباله چپ است که مقدار بحرانی آن براساس $1-\alpha$ و $d.f = n-1$ از جدول کای ـ مربع استخراج می‌شود و در حالت سوم دو مقدار بحرانی $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ و $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ باید از جدول کای ـ مربع استخراج شود؛ چون یک آزمون دو دنباله است.

۴. تصمیم‌گیری: در این مرحله مقدار آمارهٔ آزمون با مقدار بحرانی مقایسه می‌شود. چنانچه کای ـ مربع محاسبه شده در ناحیهٔ H_0 قرار گیرد، فرض H_0 در سطح خطای α درصد پذیرفته می‌شود؛ در غیر این صورت H_0 رد می‌شود. در این تجزیه و تحلیل، ممکن است فرضیه پژوهشی تأیید یا رد شود.

مثال ۱۰ـ۱۱ مدیر عامل بازار بورس تهران ادعا کرده که ریسک (انحراف معیار) بازده سهام شرکتهای عرضه کننده سهام در بازار بورس کمتر از ۵ تومان است. بدین منظور یکی از کارگزاران، ۲۵ شرکت را به طور تصادفی از بین شرکتهای عرضه کننده سهام در بازار بورس انتخاب کرده که میانگین بازده آنها ۱۴ و انحراف معیارشان ۴ تومان است. اگر بازده شرکتهای بازار بورس از توزیع نرمال برخوردار باشد، ادعا را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

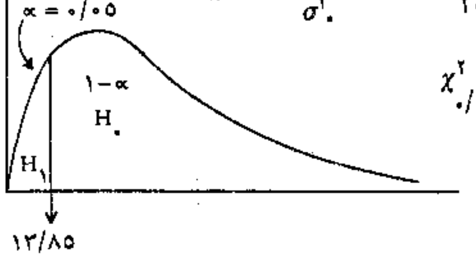
براساس مراحل تعریف شده برای آزمون واریانس جامعه، فرضیه‌های آماری و محاسبات لازم برای بررسی ریسک بازده شرکتها عبارت است از:

۱. فرضها: $H_0: \sigma_x^2 \geq 25$

$H_1: \sigma_x^2 < 25$

۲. آمارهٔ آزمون: $\chi^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)(4)^2}{25} = 15/36$

۳. مقدار بحرانی: $\chi^2_{0/05,\ 24} = 13/85$



٤. تصمیم‌گیری: آمارهٔ آزمون (χ^2=۱۵/۳٦) در مقایسه با مقدار بحرانی (χ^2=۱۳/۸۵) در ناحیه H_0 قرار می‌گیرد؛ بنابراین با ۹۵ درصد اطمینان می‌توان گفت فرض صفر پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرضیه پژوهشی رد شده، نقیض آن پذیرفته می‌شود.

۱۱.۱۳ آزمون فرض آماری برای مقایسهٔ واریانس دو جامعه

فرضیه‌های تطبیقی نه تنها شامل میانگین و نسبت موفقیت است بلکه برای مقایسهٔ واریانس دو جامعهٔ آماری نیز استفاده می‌شود. فرضیه‌ای که به این منظور تدوین شود، به کمک مراحل آزمون مقایسهٔ واریانس دو جامعه بررسی می‌گردد. مراحل آزمون به شرح ذیل است.

۱. فرضها: فرضیه‌های پژوهشی بر حسب نوع آنها به صورت یکی از این حالتها تبیین خواهد شد:

$$۱)\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases} \qquad ۲)\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases} \qquad ۳)\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2 \end{cases}$$

۲. آمارهٔ آزمون: در صورتی که دو جامعهٔ مورد مقایسه از توزیع نرمال یا تقریب نرمال برخوردار باشند، آمارهٔ آزمون برای نسبت دو واریانس جامعه، $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$، دارای توزیع فیشر است که براساس رابطه ۱۱.۱٦ تعریف می‌شود:

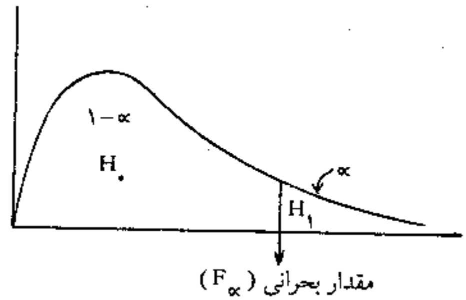
$$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \qquad (۱۱.۱٦)$$

چنانکه گفته شد، حالت تساوی در H_0 منظور می‌شود. پس اگر فرض تساوی دو واریانس پذیرفته شود، می‌توان رابطه ۱۱.۱٦ را به صورت ساده‌تر در رابطهٔ ۱۱.۱۷ دید.

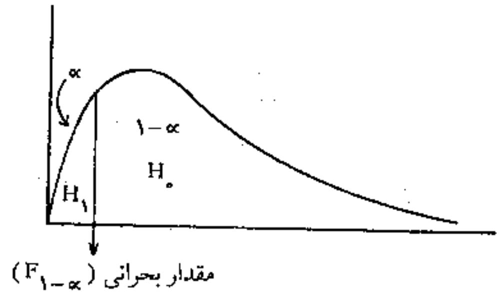
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad (۱۱.۱۷)$$

۳. مقدار بحرانی: مقدار بحرانی براساس ∝ و درجهٔ آزادی صورت $(d.f_1 = n_1 - 1)$ و درجهٔ آزادی مخرج $(d.f_2 = n_2 - 1)$ ، از جدول F با توجه به یکی از این اشکال تعیین می‌شود.

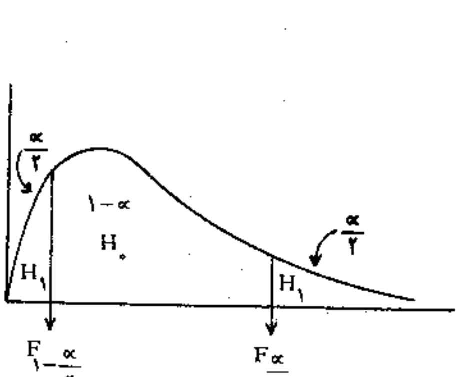
۱) $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$



۲) $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$



۳) $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$



شکل ۱۱.۱۰ سطح زیر منحنی H_0 و H_1 برای مقایسه واریانس دو جامعه

مقدار بحرانی $F_{1-\alpha}$ از جدول فیشر براساس این رابطه تعریف می‌شود:

$$F_{(1-\alpha),\, d.f_1,\, d.f_2} = \frac{1}{F_{\alpha,\, d.f_2,\, d.f_1}} \qquad (۱۱\text{-}۱۸)$$

۴. تصمیم‌گیری: چنانچه آماره آزمون در ناحیهٔ H_0 قرار گیرد، H_0 در سطح اطمینان دلخواه تأیید می‌شود و در غیر این صورت رد می‌شود.

مثال ۱۱-۱۱ در گزارش مدیریت، جمله‌ای به این صورت توسط مأمور کنترل کیفیت آمده‌است: «پراکندگی وزن محصولات تولید شده به وسیلهٔ ماشین «الف» بیشتر از ماشین «ب» است.» مدیر کارخانه به منظور بررسی گزارش مأمور کنترل کیفیت، از ماشین «الف و ب» نمونه‌هایی انتخاب کرده که حاصل اطلاعات نمونه به این شرح است. توزیع وزن محصولاتی که به وسیله ماشین «الف و ب» تولید می‌شوند نرمال است. صحت جمله را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

ماشین الف	ماشین ب
$n_A = ۱۶$	$n_B = ۸$
$\bar{X}_A = ۱۵/۰$ (کیلوگرم)	$\bar{X}_B = ۱۵/۵$ (کیلوگرم)
$S_A = ۴/۵$ (کیلوگرم)	$S_B = ۲/۲۵$ (کیلوگرم)

۱. فرضها:

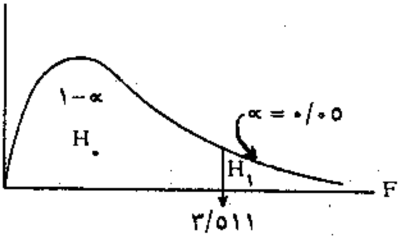
نقیض ادعا: $H_0 : \sigma_A^2 \le \sigma_B^2$

ادعا: $H_1 : \sigma_A^2 > \sigma_B^2$

۲. آمارهٔ آزمون: $F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{(۴/۵)^2}{(۲/۲۵)^2} = ۴$

۳. مقدار بحرانی: $F_{۰/۰۵,۱۵,۷} = ۳/۵۱۱$

$$\begin{cases} \alpha = ۰/۰۵ \\ d.f_1 = n_A - ۱ = ۱۶ - ۱ = ۱۵ \\ d.f_2 = n_B - ۱ = ۸ - ۱ = ۷ \end{cases}$$



٤. تصمیم‌گیری: مقدار آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ H_1 قرار می‌گیرد. یعنی اینکه داده‌ها دلالت کافی بر تأیید H_0 در سطح خطای ۵ درصد ندارند. بعلاوه، چون H_1 بیان‌کننده ادعاست، پس می‌توان گفت ادعای مأمور کنترل کیفیت در سطح اطمینان ۹۵ درصد صحت دارد.

تمرین

۱. هدف یک تحقیق، مقایسهٔ طول عمر دو نوع لامپ است. بدین‌منظور از لامپهای نوع «الف» یک نمونهٔ تصادفی ۲۰ تایی انتخاب شده که میانگین آن ۱۵ هزار ساعت و انحراف معیارش ٤ هزار ساعت است. در حالی که نمونه تصادفی ۲۵ تایی از لامپهای نوع «ب»، میانگین ۱۷ هزار ساعت و انحراف معیار ٦/٥ هزار ساعت دارد. با پذیرفتن فرض نرمال بودن طول عمر لامپها در هر دو نوع، آزمونهای ذیل را در سطح خطای ۵ درصد برگزار کنید.

الف) آیا می‌توان پذیرفت که پراکندگی عمر لامپهای نوع «الف» مساوی ۵ هزار ساعت است؟

ب) آیا می‌توان پذیرفت که پراکندگی عمر لامپهای نوع «الف» کمتر از «ب» است؟

۲. می‌خواهیم یکنواخت بودن چگالی الیاف نخ جوراب‌بافی تولیدی با دو ماشین ریسندگی را مقایسه کنیم. هر مشاهده‌ای عبارت از اندازه گرفتن وزن ۱۰۰ متر نخی است که به طور تصادفی انتخاب شده است. فرض کنید که ۱۲ مشاهدهٔ وزن از محصول ماشین «الف» و ۱۰ مشاهدهٔ وزن از محصول ماشین «ب» به دست آمده‌است. انحراف معیار اندازه‌های وزن برای ماشین «الف»، ۲/۳ و برای ماشین «ب»، ۱/۵ است. در سطح اطمینان ۹۰ درصد به این سؤالات پاسخ دهید:

الف) آیا دلیل قوی وجود دارد که تغییرپذیری تولید برای ماشین «الف» بیشتر از ماشین «ب» است؟

ب) فاصله اطمینان لازم را برای نسبت انحراف معیارهای دو جامعه بسازید.

۳. فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «پراکندگی قیمت پودر لباسشویی در فروشگاههای تهران دست کم ۱۰ تومان است.» برای بررسی این فرضیه، ۳٦ فروشگاه تهران به طور تصادفی انتخاب شده که میانگین و انحراف معیار قیمت پودرلباسشویی در این فروشگاهها ۱٦۰ و ۹ تومان است، قیمت کالا دارای توزیع نرمال است. در سطح اطمینان ۹۹ درصد آزمون مناسب را برای بررسی فرضیهٔ فوق برگزار کنید و بنویسید تحلیل کاربردی تأیید یا رد فرضیه چیست.

۱۱.۱۴ خلاصه

در این فصل با استفاده از روابط تخمین آماری، چهارچوب و مبانی تبیین فرضیه‌های پژوهشی به کمک فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 بتفصیل بحث شد. به طور کلی برای تبیین فرضیه پژوهشی از نوع میانگین (μ_x)، مقایسهٔ میانگین دو جامعه ($\mu_1-\mu_2$)، نسبت موفقیت (p) مقایسهٔ نسبت موفقیت در دو جامعه (p_1-p_2)، انحراف معیار جامعه (σ_x) ومقایسهٔ واریانس دو جامعه ($\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$) می‌توان از مراحل چهارگانهٔ ذیل استفاده کرد:

مرحله اول. تعریف فرضیه‌های آماری H_0 و H_1، مرحله دوم. تعیین توزیع نمونه گیری آماره و نوع آمارهٔ آزمون، مرحله سوم. تعیین سطح زیر منحنی H_0 و H_1 و محاسبهٔ مقدار بحرانی و مرحله چهارم. تصمیم‌گیری.

از مهمترین نکات در مرحله تصمیم‌گیری، تبدیل تصمیم‌آماری به تصمیم مدیریتی است. به عبارت ساده‌تر پس از تأیید یا رد H_0 محقق باید به طور صریح تأیید یا رد فرضیهٔ پژوهشی خود را بیان دارد.

۱۱.۱۵ سؤالات و مسائل

سؤالات دو گزینه‌ای

۱. فرضیه آماری، حکمی دربارهٔ جامعه است. ص ☐ غ ☐

۲. فرضیه صفر، H_0، همیشه نشان‌دهندهٔ ادعاست. ص ☐ غ ☐

۳. فرضیه صفر، H_0، همیشه باید دربرگیرندهٔ تساوی باشد. ص ☐ غ ☐

۴. سطح معنی‌دار، همان مقدار خطای نوع اول است. ص ☐ غ ☐

۵. خطای نوع دوم عبارت است از احتمال رد H_0 به شرط اینکه H_0 درست باشد. ص ☐ غ ☐

۶. تنها راه کاهش خطای نوع اول و دوم افزایش حجم نمونه است. ص ☐ غ ☐

۷. اگر $H_0: \mu_x \geq 200$ باشد، آزمون از نوع یک دنبالهٔ راست است. ص ☐ غ ☐

۸. توزیع کای ـ مربع برای آزمون نسبت واریانسها به کار می‌رود. ص ☐ غ ☐

۹. آماره‌های به کارگرفته در فنون آزمون فرض آماری همان آماره‌های تخمین هستند. ص ☐ غ ☐

۱۰. در آزمون مقایسهٔ زوجی، فقط باید از توزیع نمونه گیری t استیودنت استفاده کرد. ص ☐ غ ☐

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. در آزمون $H_0: \mu_x = \mu_0$ برای جامعه‌ای نرمال با انحراف معیار نامشخص و درجهٔ آزادی کمتر از ۳۰، آماره آزمون عبارت است از:

الف) $t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$ ج) $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{\bar{X}}}$

ب) $t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{\bar{X}}}$ د) هیچکدام

۱۲. فروشنده‌ای ادعا کرده است که بیش از ۶۰ درصد تولیدات او دست کم ۲۰ سال عمر می‌کنند. فرضیه صفر، H_0، برای آزمون این ادعا کدام است؟

الف) $H_0: P < \%60$ ج) $H_0: P \geq \%60$

ب) $H_0: P \leq \%60$ د) $H_0: P > \%60$

۱۳. سطح زیر منحنی H_0 در آزمون فرض آماری همواره برابر است با:

الف) سطح اطمینان آزمون ج) خطای نوع اول (α)

ب) خطای نوع دوم (β) د) به تعریف H_0 بستگی دارد.

۱٤. اگر میانگین یک نمونه ۱۰۰ تایی از X مساوی ۳۰ و انحراف معیار آن ۵ باشد و میانگین نمونه‌ای ۲۰۰ تایی از Y مساوی ۲۵ و انحراف معیار آن ۱۰ باشد، مقدار آمارهٔ آزمون برای فرض صفر بودن تفاوت میانگینها برابر است با:

الف) ۱۵/۸۱ ج) ۵/۷۷

ب) ۱/۹٦ د) ۳/٤٤

۱۵. کدام یک از این گزینه‌ها صحیح است:

الف) $\alpha + \beta = 1$ ج) (رد کردن H_0 وقتی H_0 درست است) $P = \alpha$

ب) (رد کردن H_0 وقتی H_0 نادرست است) $P = \alpha$ د) (رد کردن H_0 وقتی H_0 درست نیست) $P = \beta$

۱٦. توزیع مجموع دو متغیر نرمال مستقل کدام است؟

الف) نرمال ج) فیشر

ب) کای ـ مربع د) t استیودنت

۱۷. آمارهٔ آزمون، نرمال صفر و یک است و $H_0: \mu_x = 40$ تعریف شده است. مقدار آمارهٔ آزمون ٤/۵ است. در سطح اطمینان ۹۵ درصد کدام گزینه صحیح است؟ (مقدار جدول ۱/۹٦ فرض شود.)

الف) H_0 تأیید می‌شود. ج) H_1 تأیید نمی‌شود.

ب) H_1 تأیید می‌شود. د) به اطلاعات بیشتری برای تصمیم‌گیری نیاز است.

۱۸. فرض کنید Z_1 تا Z_K متغیرهای استاندارد صفر و یک باشند. آنگاه توزیع $\sum_{i=1}^{K} Z_i^2$ کدام گزینه است.

الف) نرمال	ج) فیشر (F)

ب) t استیودنت	د) کای ـ مربع (χ^2)

۱۹. در کدام یک از این موارد از آزمون زوجی استفاده می‌شود.

الف) گروههای مستقل	ج) زوجهای مستقل از هم

ب) گروههای همبسته	د) ب و ج

۲۰. ادعا شده است که پراکندگی جامعهٔ «الف» کمتر از جامعهٔ «ب» است. فرض H_0 کدام است؟

الف) $H_0: \sigma_A^2 < \sigma_B^2$	ج) $H_0: \sigma_A^2 \geq \sigma_B^2$

ب) $H_0: \sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$	د) $H_0: \sigma_A^2 > \sigma_B^2$

۲۱. اطلاعات $\bar{X} = ۶۰$، $S_x = ۱۵$ و $n = ۱۰$ از یک جامعهٔ نرمال به دست آمده‌است. محاسبه کنید مقدار آمارهٔ آزمون برای فرضیهٔ $H_0: \sigma_x^2 = ۱۰۰$ کدام است؟

الف) ۲۰/۲۵	ج) ۱۵

ب) ۶	د) ۱/۳۵

۲۲. اطلاعات ذیل مربوط به دو شرکت «الف و ب» است:

شرکت «الف»	شرکت «ب»
$n_1 = ۱۰$	$n_2 = ۱۵$
$\bar{X}_1 = ۱۰۰$	$\bar{X}_2 = ۱۲۰$
$S_1 = ۸$	$S_2 = ۱۰$

با فرض نرمال بودن توزیع X در دو شرکت، مقدار آمارهٔ آزمون برای بررسی فرضیهٔ «تساوی واریانس X در دو شرکت» کدام است؟

الف) ۰/۸۰	ج) ۰/۶۴

ب) ۰/۴۱	د) ۰/۵۳

۲۳. اگر $F_{۰/۰۵,۵,۹} = ۳/۴۸۱۷$ باشد، مقدار $F_{۰/۹۵,۹,۵}$ کدام است؟

الف) ۰/۲۸۷۲	ج) ۳/۳۰۷۶

ب) ۳/۴۸۱۷	د) باید جدول F در دسترس قرار گیرد.

۲۴. اگر $n_1 = ۱۲۰$، $n_2 = ۱۰۰$، $\bar{P}_1 = ۰/۶۰$ و $\bar{P}_2 = ۰/۵۰$ باشد، مقدار آمارهٔ آزمون برای آزمون فرض $H_0: P_1 \leq P_2$ کدام است؟

الف) ۲/۵۷۵	ج) ۱/۳۴۷ −

ب) ۱/۴۹۱	د) ۲۰۰۷۱ −

مسائل

۲۵. در تعریف مدیر موفق گفته می‌شود که «عملکرد کارمندان در زمان مدیریت وی بیشتر از زمان غیبت اوست.» برای بررسی تعریف فوق میزان عملکرد ٦ کارمند در زمان مدیریت و غیبت مدیر اندازه گیری شده که در این جدول آمده است:

فرد	۱	۲	۳	٤	٥	٦
عملکرد در زمان مدیریت مدیر	٥۰	٥٥	٦۰	٥۸	۷۰	۷٥
عملکرد در زمان غیبت مدیر	٤٥	٤۷	٥٥	٦۰	٥۰	٦۲

الف) با فرض نرمال بودن امتیازات عملکرد، صحت تعریف را در سطح خطای ٥ درصد آزمون کنید.

ب) فرض کنید، نمونهٔ بالا یک نمونهٔ مقدماتی است و دقت برآورد ٤± نمره باشد. حجم نمونه لازم را برای بررسی نهایی تحقیق تعیین کنید.

۲٦. در تئوریهای مدیریت بیان شده که مهمترین انگیزه «پول» است. یکی از دانشجویان مدیریت میزان رضایت شغلی ۷ کارمند را قبل از افزایش حقوق ماهانه و بعد از آن اندازه گیری و در این جدول خلاصه کرده است:

کارمند	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷
قبل از افزایش	٥۰	۷۰	۸۰	٦۰	٥٥	٥۰	٦۸
بعد از افزایش	٦۰	۷٥	۸۰	۷۰	٦٥	٦۲	۷۰

الف) فرض نرمال بودن میزان انگیزه را پذیرفته، صحت ادعا را در سطح خطای یک درصد آزمون کنید.

ب) اگر این نمونه، یک نمونهٔ مقدماتی باشد، حجم نمونهٔ مناسب را با دقت ٥± نمره تعیین کنید.

۲۷. مدیر نمایشگاه بین‌المللی کتاب ادعا کرده است که میانگین زمان بازدیدکنندگان غرفهٔ خارجی کتاب دست کم ٥ ساعت است. بدین منظور از میان بازدیدکنندگان این غرفه یک نمونهٔ ٦۰ نفره انتخاب شده که میانگین و انحراف معیار زمان بازدید آنها به ترتیب ٤ و ۱/٥ ساعت بوده است. صحت ادعا را در سطح خطای ۲ درصد بررسی کنید.

۲۸. مدیر نمایشگاه از بازدیدکنندگان غرفهٔ داخلی یک نمونهٔ تصادفی ٤٥ نفره انتخاب کرده است که مستقل از نمونهٔ مسألهٔ ۲۷ هستند. میانگین و انحراف معیار زمان بازدید این نمونه نیز به ترتیب ٥/٥ و ۱/۷٥ ساعت است. در سطح خطای ۲ درصد صحت این فرضیه را آزمون کنید: «میانگین زمان بازدید از غرفه داخلی بیشتر از غرفه خارجی است.»

۲۹. فرضیه‌ای به این صورت بیان شده‌است: «میانگین پرداخت به مدیران در سازمانهای خصوصی کمتر از سازمانهای دولتی است.» تحلیلگری برای بررسی فرضیه فوق از هر گروه نمونه‌هایی انتخاب کرده که خلاصهٔ محاسبات اولیهٔ در این جدول آمده است (داده‌ها برحسب هزار تومان):

سازمان دولتی	سازمان خصوصی
$n_۲ = ۲۵$	$n_۱ = ۲۰$
$\bar{X}_۲ = ۱۰۰$	$\bar{X}_۱ = ۹۵$
$S_۲ = ۸$	$S_۱ = ۱۰$

توزیع دستمزد در هر دو گروه نرمال است. صحت فرضیه را در سطح اطمینان ۹۹ درصد آزمون کنید.

۳۰. استاندارد یک دستگاه، برش محصولاتی با میانگین طول ۶۰ سانتیمتر است. به منظور بررسی کیفیت دستگاه برش، نمونه‌ای ۴۰ تایی از تولیدات، انتخاب شده که میانگین طول آنها ۵۲ و انحراف معیارشان ۱۵ سانتیمتر است. در سطح خطای یک درصد آزمون مناسب را برگزار کنید.

۳۱. یک دانشجوی کارشناسی ارشد حسابداری فرضیه‌ای به این صورت ارائه کرده است: «در شرکتهای دولتی، استانداردهای حسابداری بخوبی رعایت می‌شوند.» دانشجوی فوق برای بررسی فرضیهٔ خود حسابهای ۱۰۰ شرکت دولتی را به طور تصادفی نقد و بررسی کرد که مشخص شد ۵۵ شرکت از آنها استانداردهای حسابداری را بدرستی رعایت کرده‌اند. در سطح خطای یک درصد با استفاده از اطلاعات نمونه، دانشجو را در آزمون فرضیه یاری دهید.

۳۲. دانشجوی مسأله ۳۱، فرضیهٔ دیگری هم به این شرح بیان کرد: «شرکتهای دولتی در مقایسه با شرکتهای خصوصی تقید بیشتری برای رعایت استانداردهای حسابداری دارند.» برای بررسی این فرضیه، دانشجو علاوه بر نمونهٔ شرکتهای دولتی در مسأله ۳۱، یک نمونهٔ تصادفی ۱۵۰ تایی از شرکتهای خصوصی را انتخاب و حسابهای آنها را حسابرسی کرده است. از این نمونه، ۶۵ شرکت استانداردهای حسابداری را بخوبی رعایت کرده‌اند. صحت ادعا را در سطح خطای یک درصد آزمون کنید.

۳۳. برای مقایسهٔ نرخ بازده چهار گروه از صنایع از هر کدام از آنها نمونه‌هایی به این شرح انتخاب شده است:

صنعت	تعداد نمونه	میانگین نرخ بازده سالانه	انحراف معیار (ریسک) نرخ بازده سالانه
نساجی (A)	۵۰	۱۰/۵۷	۱۹/۰۵
سلولزی (B)	۳۵	٤/۳۸	۵/۵۲
شیمیایی (C)	۳۰	۳/٤۷	۳/۸۷
دارویی (D)	۳۵	۲/۵۱	۸/۷٦

الف) آزمون مناسب را برای $H_0: \sigma_A^2 = 225$ برگزار کنید ($\alpha = 0/01$).
ب) آزمون مناسب را برای $H_0: \mu_B \geq \mu_C$ برگزار کنید ($\alpha = 0/01$).
ج) آزمون مناسب را برای $H_0: \sigma_B^2 \geq \sigma_D^2$ برگزار کنید ($\alpha = 0/05$).

۳٤. آزمایشی دربارهٔ زمان تشخیص محصول برحسب استقرار آگهی تبلیغات بر روی ۱٦ نفر به طور تصادفی انجام گرفته و نتایج حاصل بر حسب ثانیه در این جدول آمده است:

استقرار نوع اول	۱	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲
استقرار نوع دوم	٤	۲	۳	۳	۱	۲	۳	۳

زمان تشخیص از توزیع نرمال برخوردار است. آیا می‌توان گفت بین زمان تشخیص برحسب نوع استقرار اختلاف معنی‌دار وجود دارد. چرا؟ سطح معنی‌دار $\alpha = 0/05$ است.

۳۵. آزمایشی دربارهٔ زمان تشخیص محصول برحسب استقرار آگهی بر روی ۸ نفر که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند، انجام گرفته است. زمان تشخیص محصول بر حسب ثانیه برای هر فرد در وضعیت استقرار نوع اول و نوع دوم در جدول ذیل آمده‌است (هر فرد تحت آزمایش هر دو استقرار قرار گرفته است).

شخص آزمون شونده	۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸
استقرار نوع اول	۳	۱	۱	۲	۱	۲	۳	۱
استقرار نوع دوم	٤	۲	۳	۱	۲	۳	۳	۳

آیا می‌توان گفت نوع استقرار بر زمان تشخیص محصول مؤثر است؟ فرض نرمال بودن زمان تشخیص را پذیرفته و ۲٪ = α در نظربگیرید.

۳٦. ملاکهای متعددی برای انتخاب بهترین عرضه کنندهٔ مواد اولیه کارخانه وجود دارد؛ از جمله پایین‌بودن میانگین زمان تحویل و پایین بودن پراکندگی زمان تحویل (ریسک در تحویل).

در حال حاضر مواد اولیه کارخانه به وسیلهٔ سه عرضه کنندهٔ الف ، ب و ج تأمین می‌شود. ۸ سفارش گذشته مواد اولیه به عنوان نمونه‌ای تصادفی از کل سفارشات قابل استفاده هستند. اطلاعات مربوط به این سفارشات در جدول خلاصه شده است.

توزیع زمان تحویل برای سفارشات هر سه عرضه کننده نرمال است. سطح اطمینان ۹۰ درصد را در نظر گرفته و به این سؤالات پاسخ لازم بدهید.

عرضه کننده	الف	ب	ج
n_i	۸	۸	۸
$\bar{X}_i$ (روز)	۲۰	۲۵	۱۵
S_i (روز)	۷	۵	۱۰

الف) آیا می‌توان گفت عرضه کنندهٔ «الف» میانگین زمان تحویل کمتری از عرضه کنندهٔ «ب» دارد؟ آزمون مناسب را برگزار کنید.

ب) اگر ملاک انتخاب عرضه کننده «پراکندگی زمان تحویل» باشد، از بین دو عرضه کنندهٔ «الف و ج» کدام یک را انتخاب خواهید کرد؟ چرا؟

ج) آیا می‌توان گفت پراکندگی زمان تحویل کل سفارشات عرضه کنندهٔ «ب» ۷ روز است؟

د) آیا می‌توان گفت میانگین زمان تحویل کل سفارشات عرضه کنندهٔ «ج» ۲۰ روز است؟

هـ) فرض کنید نمونهٔ تعیین شده برای بررسی یک نمونهٔ مقدماتی است. فرض تساوی واریانس زمان تحویل سفارشات را در هر سه عرضه کننده بپذیرید و با در نظر گرفتن دقت ۵± روز، نمونه مناسب را تعیین کنید (راهنمایی: مقدار واریانس برای محاسبهٔ n عبارت است از:

$$S_P^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2 + (n_3-1)S_3^2}{n_1+n_2+n_3-3}$$

۳۷. انحراف معیار میزان برق مصرفی منطقه چهار تهران ۲۰۰ تومان است. نمونه‌ای به حجم ۱۶ خانواده انتخاب شده که میانگین آن ۹۱۰ تومان است. احتمال اینکه انحراف معیار نمونه کمتر از ۲۴۵ تومان باشد، چقدر است؟

۳۸. بـه مـنظور بـررسی مـیزان تأثیر یک دوره کوتـاه مـدت حسـابداری، دوره‌ای بـرای یک نمونهٔ تصادفی شش نفره برگزار شده و نمره‌های دانشجویان قبل و بعد از دوره در این جدول آمده است:

نمرهٔ قبل از دوره	۴۰	۷۰	۴۵	۵۰	۶۸	۵۵
نمرهٔ بعد از دوره	۴۵	۷۲	۵۶	۵۰	۷۴	۶۳

الف) آیا می‌توان گفت که برگزاری دوره مفید است؟ با ذکر مفروضات، آزمون مناسبی در سطح خطای یک درصد برگزار کنید.

ب) فرض کنید نمونهٔ فوق یک نمونهٔ مقدماتی است. دقت برآورد را ۲ نمره درنظرگرفته و نمونه مناسب را برآورد کنید ($\alpha = ۰/۰۱$).

۳۹. برای برآورد حجم نمونه در یک جامعهٔ نرمال، یک محقق عرض برآورد میانگین را ۱۰ در نظر گرفته است. او معتقد است که حداقل و حداکثر مقداری که X می‌تواند در جامعهٔ آماری به خود اختصاص دهد به ترتیب ۲۰ و ۱۲۰ واحد است. حجم نمونه را در سطح اطمینان ۹۹ درصد برآورد کنید. آیا حجم نمونه تعیین شده بهینه است؟ چرا؟

٤۰. یک دستگاه خودکار باید پیستونهایی به قطر ۲۵ میلیمتر تولید کند. فرض کنید قطر پیستونها توزیع نرمال دارد. برای کنترل دقت کار دستگاه، نمونه‌ای ۱٦ تایی از پیستونها به طور تصادفی انتخاب شده که میانگین قطر پیستونها در آن برابر ۲٤/۹۸ میلیمتر با انحراف معیار ۰/۰۲ میلیمتر بوده است. آیا در سطح معنی‌دار یک درصد می‌توان ادعا کرد که دستگاه مطابق استاندارد کار می‌کند؟ رابطهٔ آزمون فرض و تخمین فاصله را برای این ادعا بررسی و نتایج را تحلیل کنید.

پاسخنامهٔ سؤالات

۱) ص	۲) غ	۳) ص	٤) ص
٥) غ	٦) ص	۷) غ	۸) غ
۹) ص	۱۰) غ	۱۱) ب	۱۲) ب
۱۳) الف	۱٤) ج	۱٥) ج	۱٦) الف
۱۷) ب	۱۸) د	۱۹) د	۲۰) ج
۲۱) الف	۲۲) ج	۲۳) الف	۲٤) ب

بایگانی فایل های حسابداری ، حسابرسی ، مالیاتی و مقالات
@Fileaccunting
مدیریت : امین یوسفیان

فصل دوازدهم

تحلیل واریانس

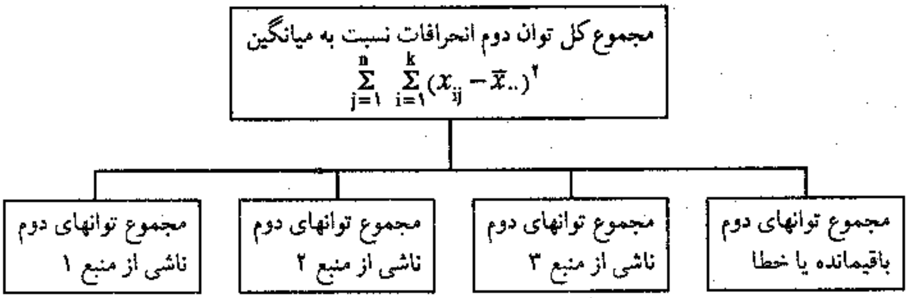
۱ـ۱۲ مقدمه

در فصل قبل دربارهٔ تفاوتهای مشاهده شده بین دو میانگین نمونه‌ای بحث کردیم. در این فصل به بررسی و تحلیل تفاوت بین بیش از دو میانگین نمونه‌ای می‌پردازیم. معمولاً به جای اینکه چندین امتحان مقایسه را دو به دو انجام دهند، هم از نظر زمان و هم از نظر هزینه به صرفه‌تر است که به طور همزمان میانگینها را با هم مقایسه کنند. در این فصل می‌خواهیم بررسی کنیم آیا بین میانگینهای نمونه‌ای که از جامعه‌های مختلف گرفتیم تفاوتهای واقعی وجود دارد و یا آن مقدار تفاوت قابل اغماض بوده و می‌توان آن را معلول تصادف دانست؛ برای مثال می‌خواهیم بر مبنای اطلاعات نمونه‌ای قضاوت کنیم آیا بین کارآیی سه روش تدریس ریاضی تفاوت معنی‌داری است یا خیر؛ ممکن است بخواهیم ببینیم آیا بین میزان محصول ناشی از چهار نوع بذر گندم تفاوت چشمگیری وجود دارد یا خیر و یا ممکن است هدف ما مقایسه تفاوت تأثیر سه نوع آگهی در جذب مشتریان بالقوه باشد. روشی که ما برای این منظور استفاده خواهیم کرد ابزار قدرتمند آماری‌ای است که «تحلیل واریانس» نامیده می‌شود.

تحلیل واریانس روشی است که می‌توان میزان انحرافات کل در مجموعهٔ داده‌ها را به مؤلفه‌هایی افراز کرد. هر مؤلفه به دلیلی قابل تشخیص بوده، می‌توان آن را به یک منبع انحراف نسبت داد. علاوه بر این، یک مؤلفه، انحراف حاصل از عاملهای کنترل نشده و خطاهای تصادفی مربوط به اندازه‌های پاسخها را نشان می‌دهد؛ برای مثال در مقایسهٔ انحرافات بین کارآیی سه روش تدریس، مشخص می‌شود که چه مقدار از انحرافات، ناشی از روش تدریس است و چه مقدار ناشی از عوامل دیگری چون استعداد تحصیلی دانشجویان، فضای آموزشی و عوامل ناشناخته دیگر؛ و یا در مقایسهٔ میزان

محصول ناشی از چهار نوع بذر گندم چه اندازه از انحرافات ناشی از نوع بذر است و چه اندازه ناشی از عوامل غیرقابل کنترلی چون نوع خاک، درجه حرارت هوا، شیب زمین؛ و یا در تأثیر سه نوع آگهی چه میزان از تفاوت در جذب مشتریان ناشی از نوع آگهی و چه میزان ناشی از عوامل دیگری چون زمان آگهی و عوامل تصادفی و غیرقابل کنترل است. در این فصل دربارهٔ بعضی از سؤالات مربوط به طرح آزمایشها بحث می‌کنیم تا با درجه اطمینان معقولی بتوانیم نتایج معنی‌دار آماری را به علل (یا عواملی) مشخص نسبت دهیم.

فرض کنید داده‌های x_{ij} برای $i = 1, 2, ..., k$ و $j = 1, 2, ..., n$ بوده، میانگین کل آنها $\bar{x}_{..}$ باشد، در این صورت کل تغییر نسبت به میانگین به صورت $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2$ مجموع توانهای دوم انحرافات درمی‌آید که مجموع کل توان دوم انحرافات نامیده می‌شود. روش تحلیل واریانس این مقدار را به قسمتهایی تجزیه می‌کند که در شکل ۱ـ۱۲، سه منبع تغییر قابل شناسایی بعلاوه مؤلفهٔ خطا مشخص شده است.



شکل ۱۲.۱ افراز تغییرات به چند منبع تغییر

تعداد منابع تغییر قابل شناسایی و فرمولهای مجموعهای توانهای دوم مؤلفه‌ها اساساً به طرح آزمایشی که در جمع‌آوری داده‌ها به کار رفته و به مدل آماری‌ای که برای تحلیل مناسب تشخیص داده شده است، بستگی دارد.

چنانچه تحلیل واریانس براساس مشاهداتی که بر مبنای معیار واحدی ـ برای مثال نوع بذر ـ طبقه‌بندی شده‌اند صورت گیرد آن را تحلیل واریانس یک عامله گویند؛ ولی اگر بر روی مشاهداتی که براساس دو معیار ـ مانند نوع بذر و نوع کود ـ طبقه‌بندی شده‌اند صورت گیرد، آن را تحلیل واریانس دو عامله گویند.

۲ـ۱۲ تحلیل واریانس یک عامله

برای اینکه روش تحلیل واریانس یک عامله را تشریح کنیم، مثالی می‌آوریم. فرض کنید می‌خواهیم تعداد ضایعات سه ماشین را با هم مقایسه کنیم. ضایعات هر کدام از این ماشینها در پنج روز به این صورت بوده‌است:

ماشین اول	۸۶	۷۹	۸۱	۷۰	۸٤
ماشین دوم	۸۹	۸۲	۸۸	۷٦	۹۰
ماشین سوم	۸۲	٦۸	۷۳	۷۱	۸۱

میانگین ضایعات این سه ماشین به ترتیب ۸۰، ۸۵ و ۷۵ است. می‌خواهیم بدانیم آیا تفاوت معنی‌داری بین آنها وجود دارد یا اینکه می‌توان اختلاف بین آنها را معلول تصادف دانست.

در حالت کلی، در چنین مسائلی k نمونه تصادفی به اندازهٔ n از k جامعه داریم. مقدار مشاهدهٔ jام از جامعه iام را با x_{ij} نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم متغیرهای تصادفی متناظر (یعنی X_{ij}) که همه مستقلند، توزیعهای نرمال با میانگینهای μ_i و واریانس مشترک σ^2 دارند. با این فرضها می‌توان گفت هر مشاهده‌ای را می‌توان به صورت: $X_{ij}=\mu_i+e_{ij}$ به ازای $i=1,2,\ldots,k$ و $j=1,2,\ldots,n$ نشان داد که در آن e_{ij}ها مقادیر متغیر تصادفی مستقل نرمال با میانگین صفر و واریانس مشترک σ^2 هستند. برای امکان تعمیم آن به وضعیتهای پیچیده‌تر، معمولاً آن را به صورت: $X_{ij}=\mu+\alpha_i+e_{ij}$ نمایش می‌دهند که به μ «میانگین کل» و به α_i «اثر تیماری» گویند که $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=0$ است. علت نامیدن جامعه‌های مختلف با عنوان تیمارهای مختلف آن است که بسیاری از تکنیکهای واریانس در ابتدا در رابطه با آزمایشهای کشاورزی مطرح شدند که در آنها، مثلاً کودهای مختلف را به عنوان تیمار در نظر گرفته، به خاک اضافه می‌کردند. ما هم از این اصطلاح استفاده کرده، هریک از ماشینها را یک تیمار می‌نامیم و تأثیر آنها را روی تعداد ضایعات مشخص می‌کنیم.

فرض صفری که باید آن را آزمون کنیم، عبارت است از:

$$H_0:\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_k$$

یا:

$$H_0:\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$$

یعنی تمام میانگینهای جامعه با هم برابرند (و یا همهٔ اثرهای تیماری صفرند). فرض مقابل عبارت است از:

دست کم دو تا از میانگینها برابر نیستند: H_1

یا:

دست کم یکی از اثرهای تیماری مخالف صفر است: H_1

آزمون، مبتنی بر تحلیل تغییرپذیری کل داده‌های تلفیق شده‌است که با این فرمول نشان داده می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2$$

که در آن:

$$\bar{x}_{..}=\frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$$

است. اگر فرض صفر درست باشد، همهٔ این تغییرپذیری ناشی از شانس است؛ اما اگر درست نباشد، در این صورت بخشی از مجموع توانهای دوم بالا ناشی از اختلافهای بین تمیارها خواهد بود. حال تغییرپذیری (انحرافات) کل فوق را به دو جزء انحرافات حاصل از تیمار و انحرافات باقیمانده (خطا) تفکیک می‌کنیم:

مجموع توان دوم باقیمانده + مجموع توان دوم حاصل از تیمار = مجموع کل توان دوم

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2=n.\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2$$

که در آن $\bar{x}_{i.}$ میانگین مشاهدات جامعه i ام و $\bar{x}_{..}$ میانگین همهٔ nk مشاهده است. فرمول فوق را به صورت : SST = SS (Tr) + SSE نشان می‌دهیم.

در اینجا انحرافات (تغییرپذیری) کل داده‌های تلفیق شده (SST) را به دو جزء تفکیک کردیم: جزء دوم ـ SSE ـ تغییر شانس یعنی تغییرات داخل نمونه‌ها ، و جزء اول ـ SS(Tr) ـ تغییر تصادفی را وقتی که فرض صفر درست باشد اندازه می‌گیرد، در ضمن این جزء تغییر بین میانگینهای جامعه‌ای را وقتی فرض صفر درست نباشد اندازه می‌گیرد. درجه آزادی مجموع توان دوم تیمارها $k-1$ و درجه آزادی مجموع توان دوم خطا $k(n-1)$ است. در این صورت، میانگین توان دوم تیمارها و میانگین توان دوم خطا

که آنها را به ترتیب با $MS(Tr)$ و MSE نشان می‌دهیم، به این صورت خواهند بود:

$$MS(Tr) = \frac{SS(Tr)}{k-1}$$

$$MSE = \frac{SSE}{k(n-1)}$$

چنانچه میانگین توان دوم تیمارها نسبت به میانگین توان دوم خطا کم باشد، نتیجه می‌گیریم که میانگینهای جامعه‌ها با هم تفاوت ندارند و فرض H_0 (تساوی میانگینها) پذیرفته می‌شود. چنانچه میانگین توانهای دوم تیمارها نسبت به میانگین توان دوم خطا زیاد باشد، نتیجه می‌گیریم که میانگینهای جامعه‌ها با هم تفاوت دارند و فرض H_0 (تساوی میانگینها) رد می‌شود. نظریه آماری می‌گوید طبق فرض صفر، نسبتِ

$$\frac{\text{میانگین توان دوم تیمارها}}{\text{میانگین توان دوم خطاها}} = \frac{MS(Tr)}{MSE}$$

که آن را با F نشان می‌دهیم و به این صورت محاسبه می‌شود:

$$F = \frac{MS(Tr)}{MSE} = \frac{SS(Tr)/(k-1)}{SSE/k(n-1)}$$

دارای توزیع F با درجات آزادی $k-1$ برای صورت و $k(n-1)$ برای مخرج است.

روشی راکه در این قسمت ارائه کردیم تحلیل واریانس یک عامله می‌نامند. معمول است که تجزیهٔ مجموع توانهای دوم و درجات آزادی به همراه میانگینهای توان دوم را به شکل جدولی به نام «جدول تحلیل واریانس» یا به صورت ساده‌تر جدول «ت.و» ارائه می‌کنند. این جدول ستون اضافی دیگری دارد که مقدار F را نیز حساب می‌کند.

جدول ۱۲.۱ جدول «ت. و» یک عامله برای مقایسهٔ k تیمار

منبع تغییرات	مجموع توانهای دوم	درجه آزادی	میانگین توانهای دوم	F
تیمارها	$SS(Tr)$	$k-1$	$MS(Tr) = \frac{SS(Tr)}{k-1}$	$\frac{MS(Tr)}{MSE}$
خطا	SSE	$k(n-1)$	$MSE = \frac{SSE}{k(n-1)}$	
جمع	SST	$kn-1$		

قبلاً گفتیم که $SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2$ و $SS(Tr) = n.\sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2$ و $SSE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$ است. برای ساده‌تر کردن محاسبهٔ مجموع توانهای دوم فوق، معمولاً از این فرمولهای محاسباتی استفاده می‌شود:

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{kn} . T_{..}^2$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{k} T_{i.}^2 - \frac{1}{kn} . T_{..}^2$$

$$SSE = SST - SS(Tr)$$

$T_{i.}$ مجموع مقادیر حاصل برای تیمار iام و $T_{..}$ مجموع کل nk مشاهده است.

مثال ۱ـ۱۲ با مراجعه به مثال صفحه ۱۳۷ در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۵$ آزمون کنید که آیا اختلاف بین میانگینهای تعداد ضایعات ماشینها معنی‌دار است یا نه.

۱. فرضها[1]: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

دست کم یکی از اثرهای تیماری غیر صفر است: H_1

۲. آماره آزمون:

جدول ۲ـ۱۲ محاسبات اولیهٔ مثال ۱ـ۱۲

ماشینها (تیمارها)	تعداد ضایعات					جمع ضایعات ($T_{i.}$)	میانگین
اول	۸۶	۷۹	۸۱	۷۰	۸۴	۴۰۰	۸۰
دوم	۸۹	۸۲	۸۸	۷۶	۹۰	۴۲۵	۸۵
سوم	۸۲	۶۸	۷۳	۷۱	۸۱	۳۷۵	۷۵

۱. فرضها را می‌توان اینطور نیز نوشت: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

دست کم دو تا از میانگینها نابرابرند: H_1

بنابراین $T_{1.} = ۴۰۰$ ، $T_{2.} = ۴۲۵$ ، $T_{3.} = ۳۷۵$ ، و $T_{..} = ۱۲۰۰$:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}^{2} = 86^2 + 79^2 + \dots + 81^2 = 96698$$

$$SST = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}^{2} - \frac{T_{..}^{2}}{kn}$$

$$= 96698 - \frac{1}{3 \times 5}(1200)^2 = 698$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3} T_{i.}^{2} - \frac{1}{kn} \cdot T_{..}^{2}$$

$$= \frac{1}{5}(400^2 + 425^2 + 375^2) - \frac{1}{3 \times 5}(1200)^2 = 250$$

$$SSE = SST - SS(Tr)$$

$$= 698 - 250 = 448$$

همانند جدول ۱ـ۱۲ جدولی تشکیل می‌دهیم و محاسبات باقیمانده را در آن انجام می‌دهیم.

جدول ۳ـ۱۲ جدول «ت.و» برای مثال ۱ـ۱۲

منبع تغییرات	مجموع توانهای دوم	درجه آزادی	میانگین توانهای دوم	F
تیمارها	۲۵۰	$3-1=2$	$\frac{250}{2} = 125$	$\frac{125}{37/33} = 3/35$
خطا	۴۴۸	$3(5-1)=12$	$\frac{448}{12} = 37/33$	
جمع	۶۹۸	$3 \times 5 - 1 = 14$		

۳. مقدار بحرانی: داریم $\alpha = ۰/۰۵$ و $n = ۳$ و $k = ۵$ پس

$$F_{\alpha, n-1, k(n-1)} = F_{0/05, 2, 12} = 3/88$$

۴. تصمیم‌گیری: چون $F = ۳/۳۵$ از $F_{0/05, 2, 12} = ۳/۸۸$ کمتر است، فرض صفر (فرض تساوی میانگینهای جامعه) در سطح معنی‌دار ۵ درصد را نمی‌توان رد کرد و اختلاف در میانگینها شانسی و تصادفی است.

در مثال قبل (مثال ۱ـ۱۲) تعداد نمونه گرفته شده از هر جامعه با تعداد نمونه جامعه دیگر برابر بود. اگر به دلیلی تعداد نمونه‌های گرفته شده از جامعه‌های مختلف برابر نباشد و برای تیمار i ام، n_i نمونه در دست باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2=\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2$$

و درجات آزادی برای SST، SS(Tr) و SSE به ترتیب عبارتند از $N-1$، $k-1$ و $N-k$ که در آنها $N=\sum_{i=1}^{k}n_i$ است. همچنین فرمولهای محاسباتی نیز به این صورت خواهند بود:

$$SST=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-\frac{1}{N}.T_{..}^2$$

$$SS(Tr)=\sum_{i=1}^{k}\frac{T_{i.}^2}{n_i}-\frac{1}{N}.T_{..}^2$$

و:

$$SSE=SST-SS(Tr)$$

مثال ۲ـ۱۲ در مثال ۱ـ۱۲، فرض کنید ضایعات سه ماشین در ۵ روز، ۲ روز و ۳ روز به ترتیب به این صورت باشد:

ماشین اول	۷۵	۷٤	۸۳	۸۵	٦۸
ماشین دوم	٦۰	۳۰			
ماشین سوم	۷۱	۷۱	٦۸		

در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید که آیا بین میانگینهای فوق که به ترتیب ۷۷، ٤۵ و ۷۰ هستند، تفاوت معنی‌داری وجود دارد؟

۱. فرضها: $H_0: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

H_1: دست کم یکی از اثرهای تیماری غیر صفر است

۲. آمارهٔ آزمون:

جدول ۱۲.۴ محاسبات اولیهٔ مثال ۲ـ۱۲

میانگین	جمع ضایعات ($T_{i.}$)	تعداد ضایعات					ماشینها (تیمارها)
۷۷	۳۸۵	۶۸	۸۵	۸۳	۷۴	۷۵	۱
۴۵	۹۰				۳۰	۶۰	۲
۷۰	۲۱۰			۶۸	۷۱	۷۱	۳

بنابراین $T_{1.}=۳۸۵$ ، $T_{2.}=۹۰$ ، $T_{3.}=۲۱۰$ و $T_{..}=۶۸۵$ است و:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 = ۷۵^2+۷۴^2+\dots+۶۸^2=۴۹۰۴۵$$

$$SST=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2-\frac{1}{N}.T_{..}^2$$

$$=۴۹۰۴۵-\frac{۱}{۱۰}(۶۸۵)^2=۲۱۲۲/۵$$

$$SS(Tr)=\sum_{i=1}^{3}\frac{T_{i.}^2}{n_i}-\frac{1}{N}.\ T_{..}^2$$

$$=(\frac{۳۸۵^2}{۵}+\frac{۹۰^2}{۲}+\frac{۲۱۰^2}{۳})-\frac{۱}{۱۰}(۶۸۵)^2=۱۴۷۲/۵$$

$$SSE=SS(Tr)-SSE$$

$$=۲۱۲۲/۵-۱۴۷۲/۵=۶۵۰$$

حال جدول «ت. و» را برای این مثال تنظیم می‌کنیم.

جدول ۱۲.۵ جدول «ت.و» برای مثال ۲ـ۱۲

منبع تغییرات	مجموع توانهای دوم	درجه آزادی	میانگین توانهای دوم	F
تیمارها	۱۴۷۲/۵	۳−۱=۲	$\frac{۱۴۷۲/۵}{۲}=۷۳۶/۲۵$	$\frac{۷۳۶/۲۵}{۹۲/۸۶}=۷/۹۳$
خطا	۶۵۰	۱۰−۳=۷	$\frac{۶۵۰}{۷}=۹۲/۸۶$	
جمع	۲۱۲۲/۵	۱۰−۱=۹		

۳. مقدار بحرانی: داریم ۳ = k، ۱۰ = ۳ + ۲ + ۵ = $N = n_1 + n_2 + n_3$ و ۰/۰۵ = α

پس $F_{\alpha, K-1, N-K} = F_{0/05, 2, 7} = ۴/۷۴$

۴. تصمیم‌گیری: چون ۷/۹۳ = F از ۴/۷۴ = $F_{0/05, 2, 7}$ بزرگتر است، فرض صفر (تساوی میانگینهای جامعه یا صفر بودن اثرهای تیماری) در سطح معنی‌دار ۵ درصد رد می‌شود. می‌توان ادعا کرد که تفاوت بین میانگینها در سطح ۵ درصد معنی‌دار است.

تمرین

۱. شرکتی قصد دارد مبالغ فروش هفتگی سه شعبه خود را مقایسه کند؛ بدین جهت فروش ۸ هفته آنها را به صورت تصادفی انتخاب و بدین ترتیب ارائه کرده است (ارقام برحسب میلیون ریال است):

شعبه اول	۱۷۶	۲۱۲	۱۸۸	۲۰۶	۲۰۰	۱۸۴	۱۹۳	۲۰۹
شعبه دوم	۱۸۷	۱۹۳	۱۸۴	۱۹۸	۲۱۰	۱۹۹	۱۸۰	۱۹۵
شعبه سوم	۱۶۴	۲۰۳	۲۰۸	۱۸۷	۲۲۳	۱۹۶	۱۸۹	۲۱۱

در سطح معنی‌دار ۵ درصد تفاوت بین میانگین فروش این سه شعبه را آزمون کنید.

۲. دروس تحقیقات در عملیات ۱، ۲، ۳ و پیشرفته در دانشکده‌ای توسط یک استاد تدریس می‌شود. میانگین نمره‌های کلاس در چهار ترم اخیر به این صورت بوده است (در بعضی از ترمها، بعضی از دروس ارائه نشده‌است).

تحقیق در عملیات ۱	۱۳	۱۲/۸	۱۲	۱۳/۵
تحقیق در عملیات ۲	۱۴	۱۵	۱۴/۵	
تحقیق در عملیات ۳	۱۵	۱۳	۱۵/۴	
تحقیق در عملیات پیشرفته	۱۳/۱	۱۲/۲		

آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان ادعا کرد که میانگین نمره‌های این چهار درس با هم تفاوت دارد؟

۳. محققی در حال بررسی این مطلب است که آیا میانگین نسبت سود خالص به فروش چهار صنعت کاغذ و چوب، لوازم الکتریکی، خودروسازی و حمل و نقل با هم برابر است یا نه. این محقق نسبت سود خالص به فروش چند شرکت فوق را به این شرح جمع‌آوری کرده است:

صنعت کاغذ و چوب	۰/۱۰	۰/۱۸	۰/۱۱	۰/۱۴
صنعت لوازم الکتریکی	۰/۰۹	۰/۱۶	۰/۱۵	۰/۲۰
صنعت خودروسازی	۰/۰۵	۰/۰۷	۰/۰۶	
صنعت حمل و نقل	۰/۰۸	۰/۱۵	۰/۲۲	

آیا این محقق می‌تواند در سطح معنی‌دار ۵ درصد ادعا کند که میانگین نسبت سود خالص به فروش در این چهار صنعت با هم برابر نیستند؟

۳ـ۱۲ طرح آزمایشها

در مثال ۱ـ۱۲ نتیجه گرفتیم که تعداد ضایعات تولیدی سه ماشین به یک اندازه هستند، ولی این نتیجه گیری شاید منطقی نباشد، چرا که ممکن است، مثلاً تعداد ضایعات ماشین اول به دلیل تجربه ناکافیِ متصدی ماشین، نامرغوب بودن قطعات یدکی‌ای که روی آنها کار کرده، یا حتی ابزارهایی که قطعات را اندازه گیری کرده و در هنگام تعیین ضایعات این ماشین از تنظیم خارج شده و تعداد ضایعات را بیشتر نشان داده است، باشد.

البته به طور کامل امکان دارد که اختلاف بین سه میانگین نمونه‌ای عمدتاً معلول نوع ماشین باشد، ولی در ضمن چندین عامل را برشمردیم که ممکن است در این اختلاف دخیل باشند. به خاطر داشته باشید که آزمون معنی‌دار می‌تواند نشان دهد که اختلافهای بین میانگینهای نمونه‌ای بزرگتر از آن هستند که بتوان آنها را معلول تصادف دانست، اما نمی‌تواند بگوید چرا این اختلافها پیش آمده‌اند.

به طور کلی اگر بخواهیم عاملی را، از بین عوامل مختلف، علت پدیده‌ای بدانیم باید تأثیر عوامل دیگر را به حداقل برسانیم. در این صورت است که می‌توان گفت، آزمایش قویاً کنترل شده است. مثلاً در خصوص مثال ۱ـ۱۲ می‌توانیم از متصدی ماشین بخواهیم به تناوب روی سه ماشین کار کند، قطعات ورودی را از لحاظ مرغوبیت کنترل کنیم تا مطمئن شویم ورودی هر دستگاه با دیگری برابر است، و ابزار اندازه گیری را پس از هر بار استفاده، بازرسی و در صورت لزوم تنظیم کنیم. اگر بتوانیم به این صورت تأثیر عوامل مختلف را، بجز عامل مورد نظر، حذف کنیم آنگاه اگر اختلاف معنی‌داری بین میانگینها باشد، قابل استناد به عامل مورد نظر است.

در اغلب موارد، آزمایشهای «قویاً کنترل شده‌ای» نظیر آنچه در بالا توصیف شد، غیرعملی است و یا نمی‌تواند اطلاعات مورد نظر را در اختیار ما قرار دهد؛ بنابراین باید دنبال راه دیگری بود. راه دیگری که نقطه مقابل روش فوق است، «تصادفی کردن» است؛ یعنی آزمایشها چنان طراحی می‌شود که تغییرات ناشی از عوامل غیرمربوط به صورت تصادفی توزیع شود. با تصادفی کردن، خود را در مقابل عوامل غیرمربوط محافظت می‌کنیم. وقتی که همهٔ تغییرات ناشی از عوامل غیرمربوط را بتوان بدین سان به صورت یکنواخت توزیع کرد، به این طرح، «طرح آزمایشی کاملاً تصادفی» گویند. مثلاً به صورت تصادفی متصدیان یا قطعات ورودی را به ماشینها اختصاص داد، و یا انتخاب ترتیب بازرسی کالاها به صورت تصادفی انجام گیرد.

برای معرفی مفهوم مهم دیگری در طرح آزمایشها، این داده‌ها را که مربوط به زمان لازم (برحسب دقیقه) برای شخصی است که با اتومبیل خود از شنبه تا چهارشنبه با استفاده از چهارمسیر مختلف به سر کار می‌رود، در نظر می‌گیریم:

مسیر اول	۲۲	۲۶	۲۵	۲۵	۳۱
مسیر دوم	۲۵	۲۷	۲۸	۲۶	۲۹
مسیر سوم	۲۶	۲۹	۳۳	۳۰	۳۳
مسیر چهارم	۲۶	۲۸	۲۷	۳۰	۳۰

میانگینهای این چهار نمونه عبارتند از ۲۵/۸ ، ۲۷ ، ۳۰/۲ ، ۲۸/۲ و چون اختلافهای بین آنها نسبتاً بزرگ است، منطقی است نتیجه بگیریم که بین میانگین زمان لازم برای آنکه شخصی با رانندگی از چهار مسیر مختلف به سر کار خود برود، اختلاف وجود دارد؛ ولی این امر از تحلیل واریانس یک عامله نتیجه نمی‌شود، چرا که مقدار $F = ۲/۸۰$ را به دست می‌آوریم و چون این مقدار از $F_{۰/۰۵,۳,۱۶} = ۳/۲۴$ بیشتر نیست، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.

البته، فرض صفر ممکن است درست باشد، ولی ملاحظه می‌کنید که نه تنها اختلافهای قابل ملاحظه‌ای بین چهار میانگین موجود است بلکه بین مقادیرِ خود نمونه‌ها هم اختلافهای بزرگ وجود دارد. در نمونه اول این مقادیر از ۲۲ تا ۳۱، در نمونه دوم از ۲۵ تا ۲۹ ، در نمونه سوم از ۲۶ تا ۳۳ و در نمونه چهارم از ۲۶ تا ۳۰ تغییر می‌کند.

بعلاوه، در هر نمونه مقدار اول کوچکتر از همه و مقدار آخر بزرگتر از همه است. از مطلب اخیر چنین برمی‌آید که تغییر در داخل نمونه‌ها ناشی از اختلاف شرایط رانندگی در روزهای مختلف هفته است. اگر چنین باشد، تغییرات ناشی از شرایط رانندگی در مجموع توان دوم خطای تحلیل واریانس یک عامله منظور شده و مخرج آمارهٔ F بزرگ شده و این می‌تواند دلیل آن باشد که چرا نتایج معنی‌دار نبوده‌اند.

برای احتراز از چنین وضعی، می‌توان عامل غیرمربوط را ثابت گرفت، ولی با این کار بندرت به اطلاعاتی که لازم داریم می‌رسیم. در مثال فوق، می‌توانستیم مطالعه را به شرایط رانندگی در روز شنبه محدود کنیم، ولی در این صورت نمی‌توانستیم مطمئن باشیم که می‌توان نتایج را به شرایط رانندگی در روز یکشنبه یا روز دیگر تعمیم داد. امکان دیگر آن است که عامل غیرمربوط را به عنوان یک عامل مهم در نظرگرفته، آزمایش را طوری طراحی کنیم که بتوانیم اثر آن را اندازه بگیریم. در این صورت «تحلیل واریانس دوعامله» به کمک ما می‌آید که در ان تغییرات کل داده‌ها به سه جزء افراز می‌شود: تیمارها (در مثال مذکور، چهار مسیر)، عامل غیرمربوط (در مثال مذکور، شرایط رانندگی در روزهای مختلف هفته) و خطای آزمایش یا تصادف.

روشی که پیشنهاد کردیم «بلوک بندی» نامیده می‌شود و به روزهای مختلف هفته عنوان بلوک اطلاق می‌شود. در حالت کلی، بلوکها سطوحی هستند که عامل غیر مربوط را در آن ثابت می‌گیریم، تا بتوانیم سهم آن را در مجموع کل تغییرات داده‌ها اندازه بگیریم.

۱۲-۴ تحلیل واریانس دو عامله

همان طور که گفتیم، تحلیل واریانس دو عامله به بررسی اثر دو عامل در ایجاد تغییرات می‌پردازد؛ مثلاً عامل نوع بذر و نوع کود در میزان محصول، عامل نوع ماشین و متصدی در تعداد ضایعات، عامل مسیر و روز در میزان زمان صرف شده برای رفتن از خانه به محل کار.

مفهوم اساسی که در تحلیل واریانس دو عامله باید معرفی شود «تأثیر متقابل» است. تأثیر متقابل در آزمایش دو عامله بدین معناست که دو تیمار مستقل نیستند و اثر خاص سطوح مختلف تیمار در یک عامل براساس سطوح عامل دیگر تغییر می‌کند. مثلاً اثربخشی روشهای مختلف تدریس وابسته به سطوح استعداد دانشجویان است، یا انجام

کار یک متصدی روی ماشین خاصی باعث افزایش ضایعات و در ماشین دیگری باعث کاهش ضایعات می‌شود. در این حالتها می‌گوییم که بین روشهای تدریس و سطوح توانایی دانشجویان و یا متصدی و نوع ماشین تأثیر متقابل وجود دارد.

۱۲-۴-۱ تحلیل واریانس دو عامله بدون تأثیر متقابل

در تحلیل واریانس دو عامله، می‌توانیم دو متغیر (عامل) را تیمارها و بلوکها ـ یا عامل A و عامل B ـ بنامیم و تیمارها را در سطر و بلوکها را در ستون نشان دهیم. فرض کنید X_{ij} به ازای $i = 1, 2, ..., k$ و $j = 1, 2, ..., n$، مقادیر n متغیر تصادفی مستقل نرمال با میانگینهای μ_{ij} و واریانس مشترک σ^2 باشند، این ماتریس را که قصد داریم تحلیل واریانس دو عامله (بدون تأثیر متقابل) را روی آن انجام دهیم، در نظر بگیرید:

x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
x_{k1}	x_{k2}	...	x_{kn}

هر مشاهده را می‌توان به این صورت نوشت:

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

که در آن μ میانگین کل، α_i اثرهای تیماری و $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ است، β_j نیز اثرهای بلوکی و $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$ می‌باشد. همچنین e_{ij} نشان‌دهندهٔ مقادیر متغیرهای تصادفی مستقل نرمال با میانگین صفر و واریانس مشترک σ^2 است.

دو فرض صفری که آزمون خواهیم کرد، عبارتند از صفر بودن اثرهای تیماری و اثرهای بلوکی، یعنی:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$$

و:

$$H_0' : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = 0$$

فرض مقابل H_1 آن است که همهٔ اثرهای تیماری برابر صفر نیستند و فرض مقابل H_1' آن است که همهٔ اثرهای بلوکی صفر نیستند، یعنی:

$$H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ ، دست کم به ازای یک مقدار } i$$

و:

$$H_1' : \beta_j \neq 0 \text{ ، دست کم به ازای یک مقدار } j$$

می‌توان براحتی اثبات کرد که:

مجموع توان دوم انحرافات = مجموع توان دوم انحرافات حاصل از تیمار + مجموع توان دوم انحرافات حاصل از بلوک + مجموع توان دوم انحرافات باقیمانده

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 + k \cdot \sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2$$

$\bar{x}_i$ میانگین مشاهدات برای تیمار i ام ، $\bar{x}_j$ میانگین مشاهدات برای بلوک j ام، و $\bar{x}_{..}$ میانگین همهٔ nk مشاهده است. یا:

$$SST = SS(Tr) + SSB + SSE$$

تنها تفاوت فرمول فوق با فرمول صفحه ۱۳۸ در آن است که اثر بلوکی در انحرافات را از مجموع توانهای دوم باقیمانده به دست آوردیم. محاسبهٔ SST و SS (Tr) همانند قبل است ولی SSE تفاوت می‌کند. فرمولهای محاسباتی برای تفکیک انحرافات به سه جزء (بدون تأثیر متقابل) بدین ترتیب است:

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{kn} \cdot T_{..}^2$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} T_{i.}^2 - \frac{1}{kn} \cdot T_{..}^2$$

$$SSB = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{n} T_{.j}^2 - \frac{1}{kn} \cdot T_{..}^2$$

که در آن T_j مجموع مقادیر بلوک j ام و $T_{..}$ مجموع کل تمام nk مشاهده است، همچنین:

$$SSE = SST - SS(Tr) - SSB$$

در این صورت جدول «ت . و» به صورت جدول ۶ـ۱۲ درمی‌آید.

جدول ۶ـ۱۲ جدول «ت . و» برای تحلیل واریانس دو عامله (بدون تأثیر متقابل)

منبع تغییرات	مجموع توانهای دوم	درجه آزادی	میانگین توانهای دوم	F
تیمارها	$SS(Tr)$	$k-1$	$MS(Tr)=\frac{SS(Tr)}{k-1}$	$F_{Tr}=\frac{MS(Tr)}{MSE}$
بلوکها	SSB	$n-1$	$MSB=\frac{SSB}{n-1}$	$F_B=\frac{MSB}{MSE}$
خطا	SSE	$(n-1)(k-1)$	$MSE=\frac{SSE}{(n-1)(k-1)}$	
جمع	SST	$nk-1$		

در این حالت دو F محاسبه می‌شود، فرض H_0 را در صورتی رد می‌کنیم که $F_{Tr} \geq F_{\alpha,K-1,(n-1)(k-1)}$ باشد و فرض H'_0 را در صورتی رد می‌کنیم که $F_B \geq F_{\alpha,n-1,(n-1)(k-1)}$ باشد.

مثال ۳ـ۱۲ با مراجعه به مثال صفحهٔ ۱۴۶، در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید که آیا اختلافهای بین میانگینهای حاصل برای مسیرهای مختلف (تیمارها) معنی‌دارند یا نه و نیز آیا اختلافهای بین میانگینهای حاصل برای روزهای مختلف هفته (بلوکها) معنی‌دارند یا نه؟

۱. فرضها:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

$$H'_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

و:

$H_1: \alpha_i \neq 0$ ، دست کم به ازای یک مقدار i

$H'_1: \beta_j \neq 0$ ، دست کم به ازای یک مقدار j

۲. آماره آزمون:

جدول ۱۲.۷ محاسبات اولیه برای مثال ۳ـ۱۲

مسیرها (تیمارها)	روزهای هفته (بلوکها) شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	جمع، $T_{i.}$	میانگین
مسیر اول	۲۲	۲۶	۲۵	۲۵	۳۱	۱۲۹	۲۵/۸
مسیر دوم	۲۵	۲۷	۲۸	۲۶	۲۹	۱۳۵	۲۷
مسیر سوم	۲۶	۲۹	۳۳	۳۰	۳۳	۱۵۱	۳۰/۲
مسیر چهارم	۲۶	۲۸	۲۷	۳۰	۳۰	۱۴۱	۲۸/۲
جمع، $T_{.j}$	۹۹	۱۱۰	۱۱۳	۱۱۱	۱۲۳	$T_{..}$=۵۵۶	
میانگین	۲٤/۷۵	۲۷/۵	۲۸/۲۵	۲۷/۷۵	۳۰/۷۵		$x_{..}$=۲۷/۸

بنابراین،

$$\sum_{i=۱}^{٤}\sum_{j=۱}^{۵}x_{ij}^{۲} = ۲۲^{۲} + ۲۶^{۲} + \ldots + ۳۰^{۲} = ۱۵۶۱۰$$

$$SST = ۱۵۶۱۰ - \frac{۱}{۵\times ٤}(۵۵۶)^{۲}$$

$$= ۱۵۳/۲$$

$$SS(Tr) = \frac{۱}{۵}(۱۲۹^{۲}+۱۳۵^{۲}+۱۵۱^{۲}+۱٤۱^{۲}) - \frac{۱}{۵\times ٤}(۵۵۶)^{۲}$$

$$= ۵۲/۸$$

$$SSB = \frac{۱}{٤}(۹۹^{۲}+۱۱۰^{۲}+۱۱۳^{۲}+۱۱۱^{۲}+۱۲۳^{۲}) - \frac{۱}{۵\times ٤}(۵۵۶)^{۲}$$

$$= ۷۳/۲$$

$$SSE = ۱۵۳/۲ - ۵۲/۸ - ۷۳/۲$$

$$= ۲۷/۲$$

بقیهٔ محاسبات در جدول ۸ـ۱۲ آورده شده است.

جدول ۱۲.۸ جدول «ت . و» برای مثال ۳ـ۱۲

منبع تغییرات	مجموع توانهای دوم	درجه آزادی	میانگین توانهای دوم	F
تیمارها	۵۲/۸	۳	$\frac{۵۲/۸}{۳} = ۱۷/۶$	$\frac{۱۷/۶}{۲/۲۷} = ۷/۷۵$
بلوکها	۷۳/۲	۴	$\frac{۷۳/۲}{۴} = ۱۸/۳$	$\frac{۱۸/۳}{۲/۲۷} = ۸/۰۶$
خطا	۲۷/۲	۱۲	$\frac{۲۷/۲}{۱۲} = ۲/۲۷$	
جمع	۱۵۳/۲	۱۹		

۳. مقادیر بحرانی: داریم: $k = ۴$ و $n = ۵$ و $\alpha = ۰/۰۵$ پس:

برای تیمارها: $F_{\alpha, K-1, (n-1)(K-1)} = F_{۰/۰۵, ۳, ۱۲} = ۳/۴۹$

برای بلوکها: $F_{\alpha, n-1, (n-1)(K-1)} = F_{۰/۰۵, ۴, ۱۲} = ۳/۲۶$

۴. تصمیم‌گیریها: چون $F_{Tr} = ۷/۷۵$ از $F_{۰/۰۵, ۳, ۱۲} = ۳/۴۹$ بیشتراست و $F_B = ۸/۰۶$ از $F_{۰/۰۵, ۴, ۱۲} = ۳/۲۶$ بیشتر است، نتیجه می‌گیریم که هر دو فرض صفر باید رد شوند. به عبارت دیگر، اختلافهای بین میانگینهای حاصل برای چهار مسیر مختلف و روزهای مختلف معنی‌دار است و ناشی از تصادف نیست.

۲ـ۴ـ۱۲ تحلیل واریانس دو عامله با تأثیر متقابل (چند مشاهده در هر سلول)

در قسمت قبل فرض بر این بود که اثرهای تیماری و بلوکی مستقلند، اگر نتوان این فرض را صحیح دانست باید از تحلیل واریانس دو عامله با تأثیر متقابل استفاده کرد. مثلاً آیا تأثیر متقابلی بین روشهای تدریس و موضوع درس وجود دارد یا خیر (به عبارت دیگر آیا می‌توان گفت برای درس مشخصی، روش تدریس خاصی موفقتر است) ، یا می‌توان گفت که در طی مسیر خانه تا محل کار مثلاً در روز شنبه استفاده از مسیر سوم بهتر است (به عبارت دیگر آیا تأثیر متقابلی بین روز و مسیر وجود دارد یا نه)؟

در تحلیل واریانس دو عامله با تأثیر متقابل، از جامعه‌ای که توزیع نرمال با میانگینهای μ_{ij} و واریانس مشترک σ^2 دارد برای هر تیمار i و هر بلوک j ـ که آن را یک

سلول می‌نامیم ـ m مشاهده تصادفی داریم. از اندیس r استفاده کرده و مشاهدهٔ x_{ijr} را مشاهدهٔ r ام از تیمار i (سطر i) و بلوک j (ستون j) می‌نامیم. این ماتریس را که در هر سلول آن m مشاهده وجود دارد در نظر بگیرید:

x_{111}		x_{1n1}
x_{112}	...	x_{1n2}
$\vdots$	...	$\vdots$
x_{11m}		x_{1nm}
$\vdots$	...	$\vdots$
x_{k11}		x_{kn1}
x_{k12}		x_{kn2}
$\vdots$	...	$\vdots$
x_{k1m}		x_{knm}

هر مشاهده‌ای را می‌توان به این صورت نوشت:

$$x_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijr}$$

در مشاهده فوق μ میانگین کل، α_i اثرهای تیماری که در نتیجه $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ است، β_j اثرهای بلوکی که $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$ است، $(\alpha\beta)_{ij}$ اثرهای متقابل تیمار و بلوک که $\sum_{i=1}^{k} (\alpha\beta)_{ij} = 0$ و $\sum_{j=1}^{n} (\alpha\beta)_{ij} = 0$ می‌باشد و e_{ijr} نشان‌دهندهٔ مقادیر متغیرهای تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس مشترک σ^2 است.

سه فرض صفری که آزمون خواهیم کرد عبارتند از صفر بودن اثرهای تیماری، اثرهای بلوکی تأثیرات متقابل تیمار و بلوک، یعنی:

به ازای تمام مقادیر i، $H_0 : \alpha_i = 0$

به ازای تمام مقادیر j، $H_0' : \beta_j = 0$

به ازای تمام ترکیبات i و j، $H_0'' : (\alpha\beta)_{ij} = 0$

فرض صفر مقابل H_0 و H_0' و H_0'' به ترتیب عبارتند از اینکه همه اثرهای تیماری، همه

اثرهای بلوکی و همه تأثیرات متقابل تیماری و بلوکی صفر نیستند، یعنی:

$H_1: \alpha_i \neq 0$ ، دست کم به ازای یک مقدار i

$H_1': \beta_j \neq 0$ ، دست کم به ازای یک مقدار j

$H_1'': (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ ، دست کم به ازای یک ترکیب i , j

در تفکیک انحرافات به چهار جزء (با تأثیر متقابل) می‌توان ثابت کرد که:

مجموع توان دوم انحرافات = مجموع توان دوم انحراف حاصل از تیمار + مجموع توان دوم انحرافات حاصل از بلوک + مجموع توان دوم انحرافات حاصل از تأثیر متقابل بلوک و تیمار + مجموع توان دوم باقیمانده

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}(x_{ijr}-\bar{x}_{...})^2 = nm.\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2 + km.\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{.j.}-\bar{x}_{...})^2$$

$$+m.\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{.j.}+\bar{x}_{...})^2$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2$$

یا:

$$SST = SS(Tr) + SSB + SS(Tr.B) + SSE$$

نحوهٔ محاسبات مجموع توانهای دوم به این صورت است:

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} x_{ijr}^2 - \frac{1}{knm}(T_{...}^2)$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{nm}.\sum_{i=1}^{k} T_{i..}^2 - \frac{1}{knm}.(T_{...}^2)$$

$$SSB = \frac{1}{km}.\sum_{j=1}^{n} T_{.j.}^2 - \frac{1}{knm}(T_{...}^2)$$

$$SS(Tr.B) = \frac{1}{m}.\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} T_{ij.}^2 - \frac{1}{nm}.\sum_{i=1}^{k} T_{i..}^2 - \frac{1}{km}.\sum_{j=1}^{n} T_{.j.}^2 + \frac{1}{knm}(T_{...}^2)$$

$$SSE = SST - SS(Tr) - SSB - SS(Tr.B)$$

در این صورت جدول تحلیل واریانس به صورت جدول ۹ـ۱۲ خواهد بود.

جدول ۱۲.۹ جدول «ت. و» برای تحلیل واریانس دو عامله (با تأثیر متقابل)

منبع تغییرات	مجموع توان دوم	درجه آزادی	میانگین توانهای دوم	F
تیمار	$SS(Tr)$	$k-1$	$MS(Tr)=\frac{SS(Tr)}{k-1}$	$F_{Tr}=\frac{MS(Tr)}{MSE}$
بلوک	SSB	$n-1$	$MSB=\frac{SSB}{n-1}$	$F_B=\frac{MSB}{MSE}$
تأثیر متقابل	$SS(Tr.B)$	$(k-1)(n-1)$	$MS(Tr.B)=\frac{SS(Tr.B)}{(k-1)(n-1)}$	$F_{Tr.B}=\frac{MS(Tr.B)}{MSE}$
خطا	SSE	$kn(m-1)$	$MSE=\frac{SSE}{kn(m-1)}$	
جمع	SST	$knm-1$		

در این حالت، سه F محاسبه می‌شود. فرض H_0 را در صورتی رد می‌کنیم که $F_{Tr} \geq F_{\alpha, K-1, kn(m-1)}$ باشد، فرض H_0' را در صورتی رد می‌کنیم که $F_B \geq F_{\alpha, n-1, kn(m-1)}$ باشد و فرض H_0'' را در صورتی رد می‌کنیم که $F_{Tr.B} \geq F_{\alpha,(K-1)(n-1),kn(m-1)}$ باشد.

مثال ۱۲.٤ می‌خواهیم تأثیر سه روش مختلف تدریس و چهار درس را بر نمره‌های دانشجویان بررسی کنیم. بدین منظور نمونه‌ای متشکل از ۳٦ نفر انتخاب کرده‌ایم که در آن هر سه نفر در یک ترکیب روش تدریس ـ درس جای داشتند. اطلاعات را در جدول زیر خلاصه کردیم:

آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان ادعا کرد که: الف) اثربخشی روشهای مختلف تدریس متفاوت است، ب) میانگین نمره‌های دروس مختلف با هم متفاوت است و ج) روشهای مختلف تدریس با نوع درس اثر متقابل دارند؟

۱. فرضها: $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$H_0': \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

$H_0'': (\alpha\beta)_{ij} = 0$ به ازای تمام ترکیبات مختلف i و j،

روش تدریس	درس ۱	درس ۲	درس ۳	درس ٤	جمع	میانگین
	۷۰	۷۷	۸۲	۸۵		
الف	۷۹	۸۱	۷۸	۹۰	۹٦۰	۸۰
	۷۲	۷۹	۸۰	۸۷		
	۸۳	۷۷	۹٤	۸٤		
ب	۸۹	۸۷	۸۳	۹۰	۱۰۲۰	۸۵
	۷۸	۸۸	۷۹	۸۸		
	۸۱	۷٤	۷۲	٦۸		
ج	۸٦	٦۹	۷۹	۷۱	۹۰۰	۷۵
	۷۹	۷۷	۷۵	٦۹		
جمع	۷۱۷	۷۰۹	۷۲۲	۷۳۲	۲۸۸۰	
میانگین	۷۹/۷	۷۸/۸	۸۰/۲	۸۱/۳		۸۰

و:

$H_1: \alpha_i \neq ۰$ ، دست کم به ازای یک مقدار i

$H_1': \beta_j \neq ۰$ ، دست کم به ازای یک مقدار j

$H_1'': (\alpha\beta)_{ij} \neq ۰$ ، دست کم به ازای یکی از ترکیبات i و j

۲. آمارهٔ آزمون:

$$\sum_{i=۱}^{۳}\sum_{j=۱}^{٤}\sum_{r=۱}^{۳} x_{ijr}^{۲} = ۷۰^{۲} + ۷۹^{۲} + \ldots + ٦۹^{۲} = ۲۳۲۰۰۰$$

$$SST = ۲۳۲۰۰۰ - \frac{۱}{۳٦}(۲۸۸۰)^{۲} = ۱٦۰۰$$

$$SS(Tr) = \frac{۱}{۱۲}(۹٦۰^{۲} + ۱۰۲۰^{۲} + ۹۰۰^{۲}) - \frac{۱}{۳٦}(۲۸۸۰)^{۲} = ٦۰۰$$

$$SSB = \frac{۱}{۹}(۷۱۷^{۲} + ۷۰۹^{۲} + ۷۲۲^{۲} + ۷۳۲^{۲}) - \frac{۱}{۳٦}(۲۸۸۰)^{۲} = ۳۰/۸$$

$$SS(Tr.B) = \frac{۱}{۳}[(۷۰+۷۹+۷۲)^{۲} + \ldots + (٦۸+۷۱+٦۹)^{۲}] - \frac{۱}{۱۲}(۹٦۰^{۲}+۱۰۲۰^{۲}+۹۰۰^{۲})$$

$$- \frac{۱}{۹}(۷۱۷^{۲} + ۷۰۹^{۲} + ۷۲۲^{۲} + ۷۳۲^{۲}) - \frac{۱}{۳٦}(۲۸۸۰)^{۲}$$

$$= ۵۳۳/۹$$

$$SSE = ۱۶۰۰ - ۶۰۰ - ۳۰/۸ - ۵۳۳/۹ = ۴۳۵/۳$$

جدول ۱۰ـ۱۲ جدول «ت.و» برای مثال ۴ـ۱۲

منبع تغییرات	مجموع توانهای دوم	درجه آزادی	میانگین توانهای دوم	F
تیمار	۶۰۰/۰	۲	$\frac{۶۰۰}{۲} = ۳۰۰/۰$	$\frac{۳۰۰/۰}{۱۸/۱} = ۱۶/۵۷$
بلوک	۳۰/۸	۳	$\frac{۳۰/۸}{۳} = ۱۰/۳$	$\frac{۱۰/۳}{۱۸/۱} = ۰/۵۷$
تأثیر متقابل	۵۳۳/۹	۶	$\frac{۵۳۳/۹}{۶} = ۸۹/۰$	$\frac{۸۹/۰}{۱۸/۱} = ۴/۹۲$
خطا	۴۳۵/۳	۲۴	$\frac{۴۳۵/۳}{۲۴} = ۱۸/۱$	
جمع	۱۶۰۰/۰	۳۵		

۳. مقادیر بحرانی: داریم $k = ۳$ و $n = ۴$ و $m = ۳$ و $\alpha = ۰/۰۵$ پس:

برای تیمارها: $F_{\alpha, K-۱, kn(m-۱)} = F_{۰/۰۵, ۲, ۲۴} = ۳/۴۰$

برای بلوکها: $F_{\alpha, n-۱, kn(m-۱)} = F_{۰/۰۵, ۳, ۲۴} = ۳/۰۱$

برای تأثیرات متقابل تیمار و بلوک: $F_{\alpha, (k-۱)(n-۱), kn(m-۱)} = F_{۰/۰۵, ۶, ۲۴} = ۲/۵۱$

۴. تصمیم‌گیریها: چون $F_{Tr} = ۱۶/۵۷$ از $F_{۰/۰۵, ۲, ۲۴} = ۳/۴۰$ بیشتر است می‌توان ادعا کرد که بین میانگین نمره‌های حاصل از روشهای مختلف تدریس تفاوت معنی‌داری وجود دارد، چون $F_B = ۰/۵۷$ از $F_{۰/۰۵, ۳, ۲۴} = ۳/۰۱$ بیشتر نیست فرض $H'_۰$ پذیرفته می‌شود (بین میانگین نمره‌های دروس مختلف تفاوت معنی‌داری وجود ندارد)، چون $F_{Tr.B} = ۴/۹۲$ از $F_{۰/۰۵, ۶, ۲۴} = ۲/۵۱$ بزرگتر است می‌توان ادعا کرد که روشهای تدریس با نوع درس اثر متقابل دارند.

اگر به مثال قبل مراجعه کنید ملاحظه می‌کنید که روش «ب» و «الف» برای درس ۴ به حصول نمره‌های بالایی منجر شده است؛ ولی مثلاً برای درس ۱ روش «ج» مؤثر بوده است. دقت نمایید که روش تحلیل واریانس می‌تواند بگوید که روشهای مختلف تدریس با نوع درس اثر متقابل دارند، ولی اگر بخواهیم قدمی فراتر از این بگذاریم و بگوییم کدام روش متناسب با کدام درس (یا دروس) است، باید یکی از به اصطلاح «آزمونهای مقایسهٔ چندگانه» را به کار ببریم که از حوصلهٔ این فصل خارج است.

تمرین

۱. تعداد فروش محصولات شرکتی با توجه به فصول مختلف و نوع وسیلهٔ تبلیغ در این جدول آمده است:

فصل	وسیلهٔ تبلیغ		
	رادیو	روزنامه	تلویزیون
بهار	٤٠	۳۵	۵۰
تابستان	۳۲	۳۷	٤۵
پاییز	۵۰	٦٠	٤۸
زمستان	۵۷	٤٠	۵۸

آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان ادعا کرد که بین: الف) فروش در فصلهای مختلف و ب) فروش به وسیلهٔ وسایل تبلیغاتی مختلف تفاوتی وجود دارد؟

۲. فرض کنید ٦ کرت یکسان در چهار مکان برای آزمایش میزان محصول تولیدی سه نوع آفتابگردان در نظر گرفته شده و این سه نوع آفتابگردان به صورت تصادفی در هر مکان کشف شده‌اند. میزان آفتابگردان (برحسب کیلوگرم) در هر کرت به این صورت گزارش شده‌است:

آفتابگردان	مکان کشت			
	الف	ب	ج	د
۱	۱۲	۱۵	۱۳	۱۱
	۱۰	۱۷	۱٤	۱۰
۲	۹	۱۸	۱٦	۱۲
	۱۳	۱۵	۱٤	۱۳
۳	۱٦	۱۵	۱۷	۱۲
	۱۵	۱٤	۱٦	۱۲

در سطح معنی‌دار ۵ درصد این فرضیه‌ها را آزمون کنید:

الف) تفاوتی در میزان محصول‌دهی سه نوع آفتابگردان وجود ندارد، ب) تفاوتی در میزان محصول‌دهی چهار مکان وجود ندارد و ج) مکان کشت و نوع آفتابگردان تأثیر متقابلی روی هم ندارند.

۱۲ـ۵ ملاحظات بیشتر

مطالبی که در این فصل مطرح شد برای مدلهای با آثار ثابت کاربرد دارد. یک «مدل با آثار ثابت» ، مدلی است که سطوح مختلف تیمار برای عاملی مشخص در آزمایش وارد می‌شوند. مثلاً در مثال ۱۲ـ٤ به صورت ضمنی فرض شده است که تنها روشهای تدریس «الف» ، «ب» و «ج» وجود دارد و این سه روش وارد مدل شده‌اند. نقطه مقابل این مدل، «مدل با آثار تصادفی» است که تنها چند نمونه تصادفی از سطوح مختلف تیمار برای عاملی مشخص وارد می‌شوند. مثلاً ممکن است ۱۰ روش تدریس وجود داشته باشد ولی ۳ تای آنها به صورت تصادفی انتخاب شوند. درچنین وضعی روشهای محاسباتی دیگری لازم است، چراکه فرضیه صفر باید مدعی آن باشد که تفاوت معنی‌داری بین تمام روشهای تدریس، نه آنهایی که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند، وجود ندارد. در بیشتر آزمایشها، مدلهای با آثار ثابت مناسب است و بدین جهت مطالب این فصل به این مدلها محدود می‌شود.

مفاهیم این فصل را برای بیش از دو تیمار یا عامل نیز می‌توان بسط داد. طرحهایی که درگیر چنین امری است به «طرحهای عاملی» معروفند، و بسیاری از آماردانها، تحلیل واریانس دو عاملی با چند مشاهده در هر سلول را در این طبقه جای می‌دهند. هرچند می‌توان تعداد فرضیه‌های صفر بسیار زیادی را با یک سری از داده‌ها به وسیلهٔ طرحهای عاملی آزمود، ولی توسعه چنین طرحهایی می‌تواند به سلولهای بسیار زیادی در جدول داده‌ها منجر شده، کار با آن را دشوار کند. به دلیل چنین مشکلاتی، طرحهایی تهیه شده‌اند که در آنها دیگر لازم نیست هر ترکیبی از سطوح تیمارهای یک عامل را در تحلیل وارد کرد. طرحهایی همانند «طرح مربع لاتین» و «طرحهای بلوکی غیر کامل» از آن جمله‌اند (به خوانندهٔ علاقه‌مند توصیه می‌شود آنها را با مراجعه به کتابهای معرفی شده در انتهای کتاب مطالعه کند).

توجه نمایید که، صرف نظر از هر طرحی که استفاده می‌شود، رد فرض صفر در تحلیل واریانس اغلب برای تحلیلگر نمی‌تواند مبنای قدرتمندی برای تصمیم‌گیری نهایی باشد، چون چنین ردی نمی‌تواند به طور دقیق مبین تفاوت بین سطوح مختلف تیماری باشد. مثلاً فرض کنید که تفاوت معنی‌داری بین موفقیت دانشجویان در سه روش تدریس مختلف وجود دارد، ما در قدم بعد می‌خواهیم ببینیم کدام یک از زوج روشهای تدریس با دیگران تفاوت دارد. «آزمون توکی» روشی برای مقایسات دو به دو است که پس از رد فرض صفر قابل استفاده است.

۱۲ـ٦ سؤالات و مسائل

سؤالات دو گزینه‌ای

۱. تحلیل واریانس را می‌توان برای قضاوت دربارهٔ برابری میانگینهای نمونه‌ای بیش از دو جامعه به کار برد. ص ☐ غ ☐

۲. در تحلیل واریانس یک عامله دو F محاسبه می‌شود، یکی برای تیمارها و یکی برای خطا. ص ☐ غ ☐

۳. در تحلیل واریانس دو عامله (بدون تأثیر متقابل)، اگر یکی از F ها کوچکتر از F جدول و یکی از F ها بزرگتر از F جدول باشد، در این صورت نمی‌توان قضاوتی دربارهٔ میانگینهای تیمارها و بلوکها داشت. ص ☐ غ ☐

٤. در تحلیل واریانس، لازم نیست که اندازه نمونه‌ها برابر باشد. ص ☐ غ ☐

٥. در تحلیل واریانس، اگر فرض صفر (فرض تساوی میانگینها) رد شد می‌توان قضاوت کرد که کدام زوج میانگینها با هم برابر نیستند. ص ☐ غ ☐

٦. در تحلیل واریانس یک عامله، فرض H_1 مبین آن است که هیچ کدام از میانگینها با دیگری برابر نیست و یا تمام اثرهای تیماری غیر صفرند. ص ☐ غ ☐

۷. در تحلیل واریانس یک عامله، میزان کل تغییرپذیری (انحراف) را دست کم به سه جزء افراز می‌کنیم. ص ☐ غ ☐

۸. در تحلیل واریانس دو عامله (بدون تأثیر متقابل)، اگر k تیمار و n بلوک داشته باشیم آنگاه ناحیه بحرانی برای F مربوط به تیمار، هر مقداری مساوی و یا بزرگتر از $F_{\propto, k-1, (n-1)(k-1)}$ خواهد بود. ص ☐ غ ☐

۹. در طرح آزمایشی کاملاً تصادفی شده، تغییرات ناشی از عوامل غیرمربوط به صورت تصادفی توزیع می‌شود. ص ☐ غ ☐

۱۰. در مدل با آثار تصادفی (در تحلیل واریانس)، تمام سطوح مختلف تیمار برای عاملی مشخص وارد می‌شوند. ص ☐ غ ☐

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. در تحلیل واریانس یک عامله، اگر تعداد تیمارها ۳ و SST = ٥۰ و SSE = ۱۸ باشد، SS(Tr) با کدام یک از گزینه‌های زیر برابر است؟

الف) ٦۸ ب) ۳٦ ج) ۳۲ د) اطلاعات کافی نیست

۱۲. با مراجعه به سؤال ۱۱، مقدار MS(Tr) کدام است؟

الف) $\frac{۵۰}{۳}$ ب) ۱۸ ج) $\frac{۳۲}{۳}$ د) ۱٦

۱۳. در سؤال ۱۱، اگر از هر تیمار ٥ نمونه گرفته باشیم، آنگاه مقدار F با کدام گزینه برابر است؟

الف) ۱۰/٦۷ ب) ٥/٤٤ ج) ۸/۳۰ د) ۱۲/۰۰

۱٤. در تحلیل واریانس دو عامله (با تأثیر متقابل)، اگر تعداد تیمارها ۳، تعداد بلوکها ۵ و در هر سلول ۲ مشاهده وجود داشته باشد، آنگاه ناحیه بحرانی در سطح ۵ درصد برای فرض H_0' (صفر بودن تمام اثرهای بلوکی) عبارت است از:

الف) $F_B \geq F_{۰/۰۵,۳,۱۰} = ?$ ب) $F_B \geq F_{۰/۰۲۵,٤,۱۰} = ?$

ج) $F_B \geq F_{۰/۰۵,٤,۱۰} = ?$ د) هیچ کدام

۱۵. در سؤال ۱٤، اگر $SST = ۱۲۰$ ، $SS(Tr) = ۲۰$ ، $SSB = ۵۰$ ، و $SS(Tr.B) = ۱۵$ باشد آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

الف) $MSB = ۱۲/۵$ ب) $F_{Tr} = ۲/۱۷$ ج) $F_{Tr.B} = ۸/۱۲$ د) هر سه

مسائل

۱٦. فردی در نظر دارد بررسی کند آیا قیمت کالایی خاص در چهار شهر مختلف متفاوت است یا نه. بدین منظور اطلاعاتی را درباره قیمت یک واحد از این کالا در فروشگاههای خرده فروشی بدین شرح جمع آوری کرده است:

شهر الف	٦۱	۵۵	۵۷	٦۰	۵۸	٦۲
شهر ب	۵۲	۵۸	۵٤	۵۵	۵۷	
شهر ج	٤۷	۵۲	٤۹	٤۹		
شهر د	٦۷	٦۳	٦۸	۵۹	٦۵	

آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان گفت که تفاوتی بین میانگین قیمت این کالا در این چهار شهر وجود ندارد؟

۱۱. در قسمت بسته‌بندی یکی از محصولات شرکتی، سه نفر کار می‌کنند. تعداد کارتن نهایی که هر کدام در ساعتهای مختلف بسته‌بندی می‌کنند به این قرار است:

فرد	ساعت		
	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۳-۱۵
۱	۲٤	۱۹	۲۱
۲	۲۲	۲۱	۲۳
۳	۱۸	۱٦	۱۵

آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان ادعا کرد که: الف) بین بهره‌وری افراد، ب) بین بهره‌وری در ساعات مختلف تفاوتی وجود دارد؟

۱۸. در دایرهٔ تحقیق و توسعهٔ شرکتی چهار طراح وجود دارند که به طور دائم برای بهبود محصولات شرکت طرحهای ابتکاری خویش را ارائه می‌کنند. در این شرکت ۳ ارزیاب نیز وجود دارد که طرحهای ارائه شده را از جهات مختلف (هزینه، عملی بودن، افزایش کیفیت محصول، دوام محصول و غیره) ارزیابی می‌کنند. با توجه به سوابق موجود در بایگانی، این اطلاعات در دسترس می‌باشد:

طراح	ارزیاب		
	الف	ب	ج
۱	۸۷	۸۳	۹۱
۲	۷۹	۷۳	۸۵
۳	۸۳	۸۵	۹۰
٤	۹۲	۸۹	۹۲

در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید که: الف) بین میانگین امتیازات طراحهای مختلف، ب) بین میانگین امتیازدهی ارزیابان مختلف تفاوتی وجود دارد یا نه؟

۱۹. فروش هفتگی شرکتی (برحسب میلیون ریال) با تبلیغ و بدون آن، و با تخفیف و بدون آن در جدول زیر منعکس شده است. در سطح معنی‌دار ۵ درصد این فرضیه‌ها را آزمون کنید:
الف) تبلیغات تأثیری در میانگین فروش ندارد،
ب) تخفیف تأثیری در میانگین فروش ندارد،
ج) تأثیر متقابلی بین قیمت‌گذاری و سیاست فروش در مقدار فروش وجود ندارد.

قیمت‌گذاری	سیاست فروش	
	با تبلیغ	بدون تبلیغ
با تخفیف	۹/۸	٦/۰
	۱۰/٦	۵/۳
بدون تخفیف	٦/۲	٤/۳
	۷/۱	۳/۹

پاسخنامهٔ سؤالات

۱) ص	۲) غ	۳) غ	٤) ص
۵) ص	٦) غ	۷) غ	۸) ص
۹) ص	۱۰) غ	۱۱) ج	۱۲) د
۱۳) الف	۱٤) ج	۱۵) الف	

فصل سیزدهم

رگرسیون خطی ساده و همبستگی

۱۳-۱ مقدمه

مدیران هر روز تصمیماتی شخصی و حرفه‌ای می‌گیرند که مبتنی بر پیش‌بینی وضع آینده است. در بسیاری از موارد پیش‌بینی آینده بر مبنای گذشته و حال است. در واقع اینان سعی می‌کنند بین دو یا چند متغیر به نحوی ارتباطی منطقی برقرار نمایند که بتوانند از آن در پیش‌بینی آینده استفاده کنند. مثلاً ممکن است مدیری به رابطهٔ بین میزان پولی که صرف تحقیق و توسعه شرکت می‌شود و سود خالص شرکت علاقه‌مند باشد، و یا به رابطهٔ بین میزان پاداش و تولید، میزان رضایت شغلی و بهره‌وری کارکنان، میزان تبلیغات و فروش، میزان انتظارات از کارکنان و عملکرد و بازدهی آنها، میزان حقوق و کارآیی، میزان درآمد سرانه و فروش محصولات شرکت و غیره علاقه نشان دهد. نحوهٔ ایجاد ارتباط خطی بین دو متغیر و تحلیل آن موضوع این فصل است.

واژهٔ «رگرسیون» به معنای «بازگشت» است و نشان‌دهندهٔ آن است که مقدار یک متغیر به متغیر دیگری برمی‌گردد. این واژه را اولین بار فرانسیس گالتون[1] در سال ۱۸۷۷ میلادی به کار برد. وی در تحقیقی متوجه شد که قد پسران خانواده با قد والدین آنها مرتبط است. بعدها آماردانان سعی کردند به توسعهٔ روابطی بپردازند که بتوان با آن میزان متغیری را با توجه به میزان دو یا چند متغیر دیگر پیدا کرد و بدین ترتیب از واژهٔ «رگرسیون چندگانه» استفاده کردند.

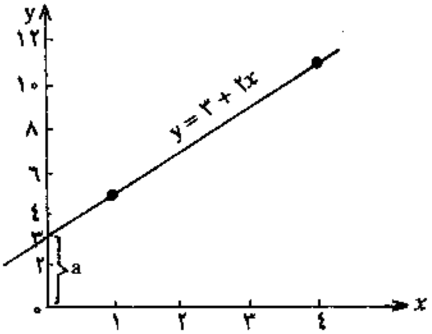
در رگرسیون به دنبال برآورد رابطه‌ای ریاضی و تحلیل آن هستیم، به طوری که با آن بتوان کمیّت متغیری مجهول را با استفاده از متغیر(ها)ی معلوم تعیین کرد. سپس در همبستگی به دنبال تعیین نوع رابطه و میزان ارتباطی هستیم که متغیرها را به هم ربط می‌دهد.

1. Francis Galton

۱۳-۲ انواع روابط بین دو متغیر و نمودار پراکنش

دو متغیر مرتبط را در نظر بگیرید که در آن x متغیری مستقل (متغیری که در انتخاب مقادیر خود آزاد است) و y متغیری وابسته (متغیری که مقادیر خود را با توجه به مقادیر متغیر x به دست می‌آورد) باشد. معادلهٔ خط مستقیم آنها به صورت $y = a + bx$ است که در آن b شیب خط و a عرض از مبدأ (محل تلاقی با محور y) است. برای به دست آوردن معادلهٔ یک خط، کافی است دو نقطه آن را داشته باشیم. اگر دو نقطهٔ مزبور x_1، y_1 و x_2، y_2 باشند در این صورت شیب خط (b) برابر است با $b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. مقدار a را می‌توان با استفاده از شیب خط و یکی از نقاط با جایگزینی در معادلهٔ خط به دست آورد.

مثال ۱-۱۳ دو نقطهٔ خطی عبارتند از (۱,۵) و (٤,۱۱). معادلهٔ خط مورد نظر را پیدا کرده، سپس خط مزبور را رسم کنید.



شیب خط: $b = \frac{11 - 5}{4 - 1} = 2$

با استفاده از نقطهٔ (۱,۵) مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$y_1 = a + bx_1$$

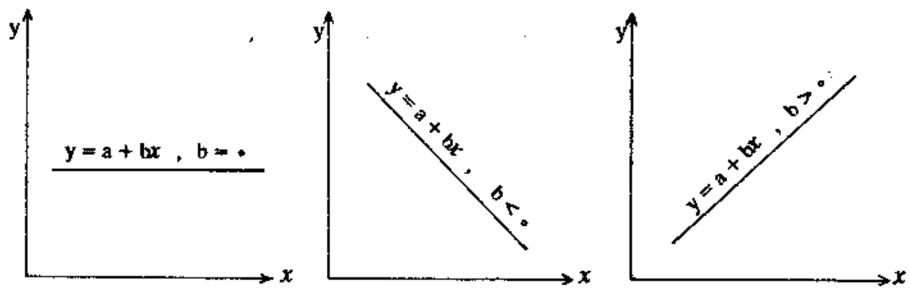
$$5 = a + 2(1)$$

$$a = 3$$

پس معادلهٔ خط مزبور بدین صورت است:

$$y = 3 + 2x$$

در مثال فوق شیب خط، $b = 2$، عددی مثبت است. شیب خط نشان‌دهندهٔ نوع رابطه است. شیب مثبت، $b > 0$، نشان‌دهندهٔ رابطهٔ مستقیم دو متغیر است، بدین معنی که با افزایش یکی، دیگری نیز افزایش و با کاهش یکی، دیگری نیز کاهش می‌یابد. شیب منفی، $b < 0$، نشان‌دهندهٔ رابطهٔ معکوس دو متغیر است، بدین معنی که با افزایش یکی، دیگری کاهش و با کاهش یکی، دیگری افزایش می‌یابد. شیب صفر، $b = 0$، نیز نشان می‌دهد که دو متغیر x و y رابطهٔ خطی نداشته و مستقلند؛ شکل ۱-۱۳ مطالب فوق را به تصویر می‌کشد.



الف) رابطهٔ مستقیم x و y　　ب) رابطهٔ معکوس x و y　　ج) استقلال x و y

شکل ۱ـ۱۳ انواع رابطهٔ خطی بین دو متغیر

در دنیای واقع برای اکثر پدیده‌ها نمی‌توان رابطهٔ دقیق ریاضی پیدا کرد، به طوری که با مشخص بودن یکی ، دیگری را به طور دقیق تعیین کرد. مثلاً فرض کنیذ که بین هزینه تبلیغات شرکت و تعداد فروش ارتباطی وجود داشته باشد. این ارتباط معمولاً ارتباطی دقیق و تنگاتنگ نیست، به طوری که نمی‌توان به طور دقیق گفت که اگر n ریال صرف تبلیغات شود، شرکت ، q عدد، کالا را خواهد فروخت. اصولاً بهتر است قبل از اینکه درصدد پیدا کردن رابطه‌ای برای مشاهداتمان باشیم، مشاهدات خود را به صورت نقاط در نموداری دو بعدی مشخص کنیم؛ به این نمودار «نمودار پراکنش» می‌گوییم. به عبارت دیگر در رسم نمودار پراکنش، ما اطلاعات خود را به نموداری منتقل می‌کنیم که این نمودار می‌تواند اطلاعات اولیهٔ بیشتری را در اختیار ما قرار دهد.

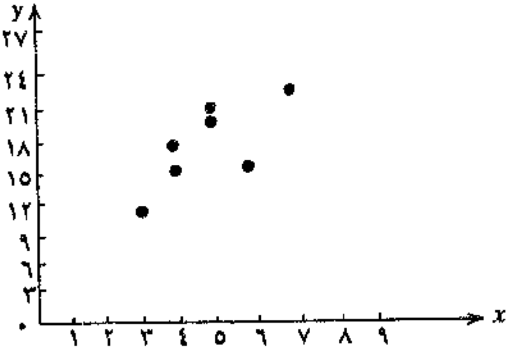
نمودار پراکنش می‌تواند سه نوع اطلاعات را در اختیار ما قرار دهد: ۱) آیا الگویی که نشان‌دهندهٔ نوعی ارتباط بین مشاهدات باشد موجود است یا نه؛ ۲) در صورت وجود نوعی ارتباط، آیا ارتباط خطی است یا غیرخطی؛ ۳) در صورتی که رابطه خطی باشد، نوع رابطه چگونه است؟

مثال ۲ـ۱۳ داده‌های زیر هزینه تبلیغات شرکتی را همراه با تعداد فروش محصولش در ۹ سال مختلف نشان می‌دهد.

تعداد فروش (y) (برحسب هزار واحد)	۱۱	۲۰	۱۶	۲۴	۲۶	۱۵	۲۱	۱۸	۲۷
هزینه تبلیغات (x) (برحسب میلیون ریال)	۳	۵	۴	۷	۹	۶	۵	۴	۸

الف) نمودار پراکنش را رسم کنید.
ب) آیا ارتباطی بین هزینه‌های تبلیغات و تعداد فروش وجود دارد؟
ج) در صورت مثبت بودن جواب بند «ب»، چه نوع ارتباطی وجود دارد؟

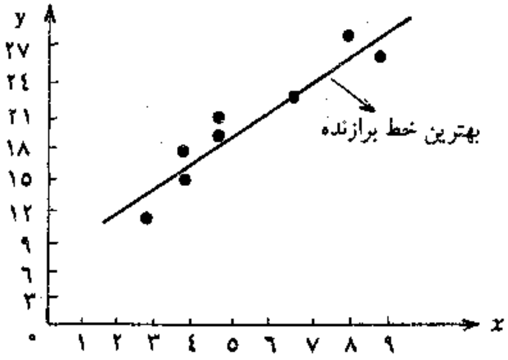
الف)



نمودار پراکنش

ب) بله.
ج) ارتباط مستقیمی بین هزینه تبلیغات و تعداد فروش وجود دارد.

مثال ۲ـ۱۳ را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم تعداد فروش را برای سطح هزینه‌ای خاص پیش‌بینی کنیم چطور از این اطلاعات استفاده کنیم؟ مثلاً فرض کنید بودجه تبلیغات سال آینده ۷ میلیون ریال باشد، انتظار داریم فروش چقدر باشد؟ نمودار پراکنش مثال ۲ـ۱۳ را نگاه کنید. این نمودار شاید بتواند در این زمینه به ما کمک کند. در نظر اجمالی در نمودار پراکنش تعدادی نقاط مجزا از هم در صفحه رسم شده است، ولی در نظر کلی، این نقاط تشکیل رابطهٔ خطی مستقیمی می‌دهند به طوری که می‌توان گفت با افزایش هزینه تبلیغات (x) تعداد فروش (y) نیز افزایش می‌یابد. مسلم است که رابطه‌ای دقیق و ساده بین دو متغیر x و y دیده نمی‌شود و نمی‌توان خطی را رسم کرد که تمام نقاط را بپوشاند، ولی می‌توان خط کش شفافی را روی نمودار پراکنش گذاشت و خطی را به صورت بصری طوری رسم کرد که با دقت «برازندهٔ» داده‌ها باشد. به رسم این خط «برازش بهترین خط» گوییم. نحوهٔ برازش این خط به کمک روابط ریاضی موضوع قسمت ۳ـ۱۳ (روش حداقل توانهای دوم) است. حال به کمک چشم و با استفاده از خط کش، بهترین خط را برای نمودار پراکنش رسم شده در مثال ۲ـ۱۳ بیرازانید.



تمرین

۱. شیب خطی ۲ و مختصات یک نقطه آن (۶ , ۵) است.

الف) معادلهٔ خط را پیدا کنید.

ب) خط مزبور را رسم کنید.

ج) رابطهٔ بین دو متغیر چگونه است؟

۲. دو نقطه از خطی (۴ , ۱) و (۱ − , ۵) است.

الف) خط را رسم کنید.

ب) معادلهٔ خط را پیدا کنید.

ج) رابطهٔ بین دو متغیر چگونه است؟

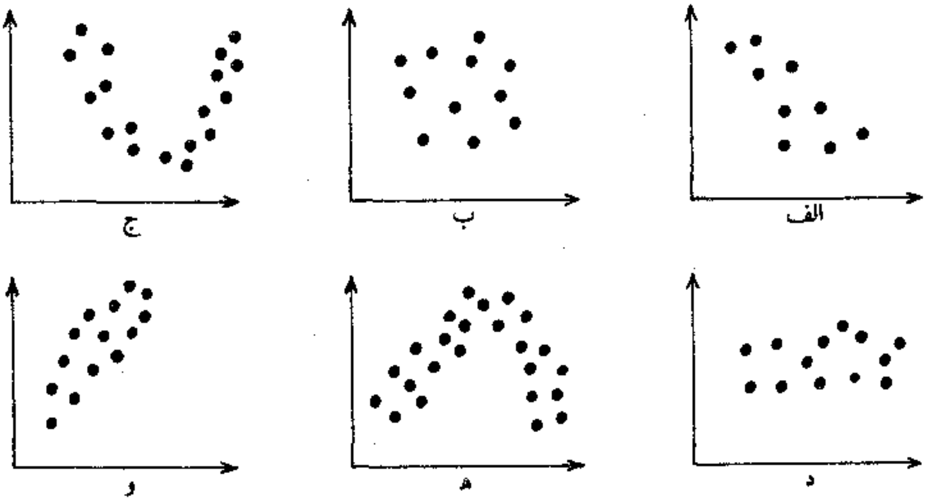
۳. معلمی علاقه‌مند است بداند که آیا بین درجه حرارت و تعداد غایبان کلاس درسش رابطه‌ای وجود دارد یا نه. بدین جهت نمونه ۱۰ روزی از درجه حرارت هوا و تعداد غایبان گرفته است:

درجه حرارت هوا	−۵	۱	−۳	۵	۰	−۶	−۲	−۸	−۵	۴
تعداد غایبان کلاس	۴	۲	۵	۲	۳	۴	۳	۵	۶	۳

الف) نمودار پراکنش را رسم کنید و بهترین خط را بیرازانید.

ب) نوع ارتباط را چگونه می‌بینید؟

۴. در هریک از نمودارهای زیر مشخص کنید: ۱) آیا بین دو متغیر رابطه وجود دارد یا نه؛ ۲) در صورت وجود رابطه، مشخص کنید خطی است یا غیرخطی؛ ۳) در صورت خطی بودن آیا رابطه مستقیم است یا معکوس؟



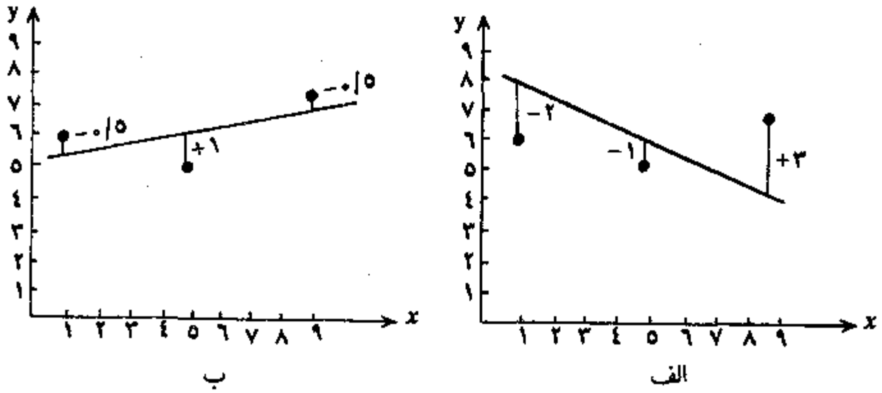
۱۳-۳ روش حداقل توانهای دوم

روشی که برای برازاندن بهترین خط به طریق ریاضی به کار برده می‌شود در قرن نوزدهم توسط ریاضیدان فرانسوی به نام آدرین لژندر[1] مطرح شد. این روش به روش حداقل توانهای دوم معروف است. در این روش معادلهٔ خط برازنده طوری تشکیل می‌شود که مجموع توانهای دوم انحرافات عمودی از خط برازنده حداقل شود. قبل از بیان روابط ریاضی، مثال ساده‌ای بزنیم. فرض کنید این داده‌ها موجود باشند:

x	۱	۵	۹
y	٦	۵	۷

در شکل ۲-۱۳ دو خط مختلف را برای این داده‌ها برازانده‌ایم و خطای خطوط را از مشاهدات مشخص کرده‌ایم. مشخص است که خط برازنده در حالت «ب» به مراتب بهتر از حالت «الف» است.

1. Adrien Legendre



شکل ۱۳.۲ دو خط برازنده مختلف برای یک سری داده‌های مشخص

در هر دو حالت «الف و ب»، جمع جبری خطاها (Σe_i) برابر صفر می‌شود.

حالت ب

Σe_i = جمع جبری خطاها

= (۰/۵) + (−۱) + (۰/۵)

= ۰

حالت الف

Σe_i = جمع جبری خطاها

= (−۲) + (−۱) + (۳)

= ۰

چون در هر دو حالت جمع جبری خطاها صفر می‌شود، بدین طریق نمی‌توان گفت کدام خط برازنده‌تر است. برای اینکه خطاهای مثبت و منفی همدیگر را خنثی نکنند، می‌توانیم هر خطا را به توان دو رسانده، سپس آنها را جمع بزنیم.

حالت ب

Σe_i^2 = مجموع توانهای دوم خطاها

= (−۰/۵)² + (۱)² + (−۰/۵)²

= ۱/۵

حالت الف

Σe_i^2 = مجموع توانهای دوم خطاها

= (−۲)² + (−۱)² + (۳)²

= ۱۴

بدین طریق، مجموع توانهای دوم خطاها در حالت «ب» (۱/۵) کمتر از حالت «الف» (۱۴) است. در این مثال دو خط برازندهٔ مختلف را با هم مقایسه کردیم تا مفهوم حداقل توانهای دوم را منتقل کنیم. حال در وضعیتی هستیم که می‌توانیم بهترین خط برازنده را تعریف کنیم. بهترین خط برازنده خطی است که مجموع توانهای دوم

خطاهایش از بقیه خطوط ممکن دیگر کمتر باشد. به چنین خطی، «خط حداقل توانهای دوم یا خط رگرسیون» می‌گویند.

برای تمایز بین مقداری که به وسیلهٔ خط حداقل توانهای دوم (خط رگرسیون) برآورد می‌شود و مقدار مشاهده شده y، مقدار داده شده به وسیله خط را با $\hat{y}$ نشان می‌دهیم؛ بنابراین هدف ما حداقل کردن مجموع توانهای دوم تفاوت بین این دو برای تمام مشاهدات است، یعنی:

$$\text{مجموع توانهای دوم خطاها} = \Sigma e^2 = \Sigma (y - \hat{y})^2$$
$$= \Sigma [y - (a + bx)]^2$$
$$= \Sigma (y - a - bx)^2$$

که در آن x و y ثابت و a و b متغیرند. هدف پیدا کردن مقادیری از a و b است که مجموع توانهای دوم خطاها، $\Sigma (y - a - bx)^2$، حداقل شود. برای پیدا کردن مقدار a و b می‌توان از عبارت فوق یک بار نسبت به a و یک بار نسبت به b مشتق جزئی گرفت و با حل همزمان آنها، به این روابط رسید (نحوهٔ پیدا کردن آنها در تمرین ۱ به شما محول شده است):

$$b = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x^2 - n\bar{x}^2} \quad , \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

که در آن $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به ترتیب میانگین مشاهدات مقادیر x و y هستند.

مثال ۳ـ۱۳ برای داده‌های مثال ۲ـ۱۳ (مثال هزینه تبلیغات و تعداد فروش) معادلهٔ خط رگرسیون را پیدا کنید.

x	y	Σxy	x^2
۳	۱۱	۳۳	۹
۵	۲۰	۱۰۰	۲۵
٤	۱٦	٦٤	۱٦
۷	۲٤	۱٦۸	٤۹
۹	۲٦	۲۳٤	۸۱
٦	۱۵	۹۰	۳٦
۵	۲۱	۱۰۵	۲۵
٤	۱۸	۷۲	۱٦
۸	۲۷	۲۱٦	٦٤
$\Sigma x = ۵۱$	$\Sigma y = ۱۷۸$	$\Sigma xy = ۱۰۸۲$	$\Sigma x^2 = ۳۲۱$

پس:

$$\bar{x} = \frac{۵۱}{۹} = ۵/٦٦۷ \ , \ \bar{y} = \frac{۱۷۸}{۹} = ۱۹/۷۷۸$$

بنابراین:

$$b = \frac{۱۰۸۲ - (۹)(۵/٦٦۷)(۱۹/۷۷۸)}{۳۲۱ - (۹)(۵/٦٦۷)^۲} = ۲/۲۹۲$$

و:

$$a = ۱۹/۷۷۸ - ۲/۲۹۲\,(۵/٦٦۷) = ٦/۷۸۹$$

پس معادلهٔ خط رگرسیون به این صورت خواهد بود:

$$\hat{y} = ٦/۷۸۹ + ۲/۲۹۲x$$

تمرین

۱. a و b را طوری تعیین کنید که مجموع توانهای دوم خطا، $\Sigma\,(y - a - bx)^۲$ حداقل شود. تمام محاسبات را نشان دهید.

۲. داده‌های زیر، قیمت (برحسب هزار ریال) و تقاضای کالایی (برحسب صد عدد) را در پنج بازار مختلف نشان می‌دهد:

قیمت	۱۵	۱۹	۲۱	۱٦	۱۸
تقاضا	۱۲۳	۵۵	۲۰	۸۸	۷٦

براساس داده‌های فوق معادلهٔ خط رگرسیون را به دست آورید.

۳. این جدول تعداد کارکنان همراه با تعداد ماشینهای تعمیر شده را در تعمیرگاهی نشان می‌دهد.

تعداد کارکنان	۵	۱	۷	۹	۲	۱۲
تعداد ماشینهای تعمیرشده	۱٦	۱۵	۲۹	۲۳	۱٤	۲۱

معادلهٔ خط رگرسیون جدول فوق را به دست آورید.

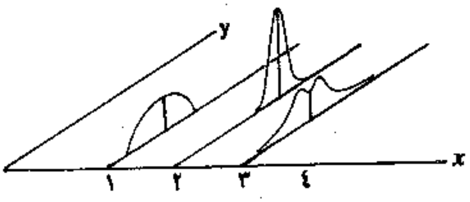
٤. تعداد ساعات مطالعه و نمره‌های ۱۰ دانشجو در درسی به این ترتیب بوده است:

تعداد ساعات مطالعه	٤	۹	۱۰	۱٤	٤	۷	۱۲	۲۲	۱	۱۷
نمرهٔ امتحان	۳۱	۵۸	٦۵	۷۳	۳۷	٤٤	٦۰	۹۱	۲۱	۸٤

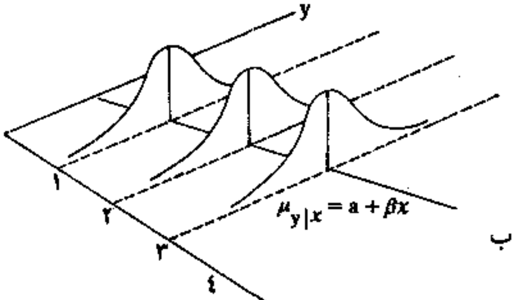
معادلهٔ خط رگرسیون را براساس جدول فوق پیدا کنید.

۱۳ـ۴ تحلیل رگرسیون و استنباط آماری

حال که یاد گرفتیم چطور خط رگرسیون را برآورد نماییم لازم است میزان اعتماد به آن را نیز فرا گیریم. مشاهداتی که بر مبنای آن خط رگرسیون را برآورد می‌کنیم از نمونه‌ای به نمونه دیگر متفاوتند. اگر خط رگرسیون جامعه $y = \alpha + \beta x$ باشد، در این صورت خط رگرسیونی که با توجه به نمونه برآورد می‌شود و آن را $\hat{y} = a + bx$ نشان می‌دهیم، دو پارامتر برآوردی a و b را دارد که به ترتیب برآوردکنندگان پارامترهای α و β خواهند بود. برای مشخص شدن موضوع، شکل ۳ـ۱۳ را نگاه کنید که در آن برای مقادیر مختلف x، توزیعهای مختلف y را نشان می‌دهد. مثال ۲ـ۱۳ (هزینه تبلیغات و تعداد فروش) را به خاطر آورید. محور x هزینه تبلیغات است و محور y تعداد فروش. مثلاً به ازای هزینه تبلیغات ۳، یک توزیع برای تعداد فروش داریم و برای ٤ یک توزیع دیگر. در تحلیل رگرسیون خطی، فرض می‌شود که x ها ثابت هستند و همچنین برای هر مقدار x، y توزیع خاصی با میانگین $\alpha + \beta x$ دارد (شکل ۳ـ۱۳ الف). در «تحلیل رگرسیون نرمال» علاوه بر این، فرض می‌کنیم که این توزیعها همه نرمال با انحراف معیار یکسان σ هستند (شکل ۳ـ۱۳ ب). تحلیلهای بعدی ما همه مبتنی بر فرض نرمال بودن این توزیعها با انحراف معیار یکسان σ است.



الف

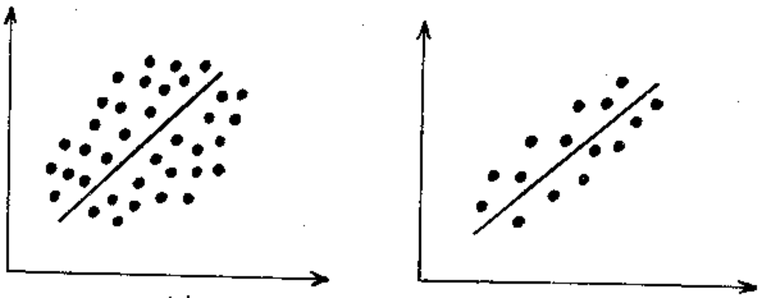


ب

شکل ۳ـ۱۳ توزیعهای y برای مقادیر مختلف x

۱ـ۴ـ۱۳ خطای معیار برآورد

شکل ۴ـ۱۳ را نگاه کنید. در این شکل دو نمودار پراکنش رسم شده است. در قسمت «الف» میزان پراکندگی داده‌ها حول خط رگرسیون کمتر است ولی در قسمت «ب» پراکندگی بیشتر است؛ بنابراین خط رگرسیون در قسمت «الف» برآوردکنندهٔ دقیقتری نسبت به حالت «ب» است. معیاری که این دقت را اندازه می‌گیرد «خطای معیار برآورد» می‌باشد. خطای معیار به ما امکان می‌دهد تا استنباطهای مختلف آماری را نسبت به رگرسیون به عمل آوریم.



شکل ۴ـ۱۳ پراکندگی مختلف داده‌ها با خطوط رگرسیون یکسان

خطای معیار برآورد که آن را با S_e نشان می‌دهیم، همان نقش انحراف معیار را بازی می‌کند. فرمول خطای معیار برآورد عبارت است از:

$$S_e = \sqrt{\frac{\Sigma (y - \hat{y})^۲}{n - ۲}}$$

صورت زیر رادیکال همان حداقل توانهای دوم است و چون در خط رگرسیون دو پارامتر a و b را برآورد کردیم؛ بنابراین مخرج در زیر رادیکال بر $n-۲$ تقسیم شده است. این فرمول ازکارآیی محاسباتی برخوردار است:

$$S_e = \sqrt{\frac{\Sigma y^۲ - a\Sigma y - b\Sigma xy}{n - ۲}}$$

مثال ۴ـ۱۳ با مراجعه به داده‌ها و اطلاعات مثال ۳ـ۱۳ خطای معیار برآورد را محاسبه کنید.

در مثال ۳ـ۱۳ مقادیر $\Sigma xy = ۱۰۸۲$، $\Sigma y = ۱۷۸$، $a = ۶/۷۸۹$ و $b = ۲/۲۹۲$ را حساب کردیم. اگر $\Sigma y^{۲}$ را نیز حساب کنیم مقدار ۳۷٤۸ به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$S_e = \sqrt{\frac{۳۷٤۸ - (۶/۷۸۹)(۱۷۸) - (۲/۲۹۲)(۱۰۸۲)}{۹-۲}}$$

$$= ۲/۹۱۸$$

۲ـ٤ـ۱۳ استنباط در مورد β

b ای که برآورد می‌کنیم در واقع برآوردکنندهٔ β است؛ بنابراین β برای ما نامشخص است. در این قسمت می‌خواهیم برای آن آزمون فرض برگزار کرده، همچنین فاصلهٔ اطمینان بسازیم. اگر خطای معیار b را با S_b نشان دهیم، بدین ترتیب می‌آید:

$$S_b = \frac{S_e}{\sqrt{\Sigma x^{۲} - n\bar{x}^{۲}}}$$

بنابراین آمارهٔ $\frac{b-\beta}{S_b}$ توزیع t با $n-۲$ درجهٔ آزادی دارد. همچنین فاصلهٔ اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰$ درصدی برای β عبارت است از $b \pm t_{\frac{\alpha}{۲}; n-۲} \cdot S_b$.

آزمون در خصوص β، بسته به مورد، می‌تواند دو طرفه و یا یکطرفه باشد. فرض $\beta = ۰$ نشان‌دهندهٔ آن است که شیب خط رگرسیون جامعه صفر است (رابطهٔ خطی بین دو متغیر نمی‌توان یافت و مقادیر y تابعی از x نیست).

مثال ۵ـ۱۳ براساس داده‌های مثالهای ۳ـ۱۳ و ٤ـ۱۳ ، آیا می‌توان ادعا کرد که تعداد فروش، تابعی از هزینهٔ تبلیغات نیست؟ در سطح معنی‌دار ۵ درصد ادعای فوق را محاسبه کنید.

۱. فرضها: $H_0 : \beta = ۰$

$H_1 : \beta \neq ۰$

۲. آماره آزمون: قبلاً در مثالهای ۳ـ۱۳ و ٤ـ۱۳ مقادیر $\Sigma x^{۲} = ۳۲۱$، $\bar{x} = ۵/۶۶۷$، $b = ۲/۲۹۲$ و $S_e = ۲/۹۱۸$ را حساب کردیم. در اینجا کافی است ابتدا S_b وسپس t را حساب کنیم.

$$S_b = \frac{۲/۹۱۸}{\sqrt{۳۲۱ - ۹\,(۵/۶۶۷)^۲}} = ۰/۵۱۶$$

$$t = \frac{۲/۲۹۲ - ۰}{۰/۵۱۶} = ۴/۴۴۲$$

۳. مقادیر بحرانی: داریم ۹ = n و ۰/۰۵ = ∝ پس:

$$t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۲} = t_{۰/۰۲۵, ۷} = \pm ۲/۳۶۵$$

۴. تصمیم‌گیری: چون ۴/۴۴۲ = t بین ۲/۳۶۵ و ۲/۳۶۵- قرار نمی‌گیرد، فرض صفر رد می‌شود و می‌توان گفت شیب خط مخالف صفر است. به عبارت دیگر فرض تبعیت نکردن y از x مردود است.

مثال ۱۳ـ۶ بر اساس داده‌های مثال ۱۳ـ۵ ، فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای β تشکیل دهید.

$$۲/۲۹۲ - (۲/۳۶۵)(۰/۵۱۶) \le \beta \le ۲/۲۹۲ + (۲/۳۶۵)(۰/۵۱۶)$$

و یا:

$$۱/۰۷۲ \le \beta \le ۳/۵۱۲$$

۱۳ـ۴ـ۳ استنباط در مورد ∝

هرچند استنباطهای مختلف برای پارامتر ∝ از اهمیت کمتری برخوردار است، ولی می‌توان همانند β، استنباطهایی را برای آن اعمال کرد. می‌توان نشان داد که:

$$S_a = \frac{S_e}{\sqrt{\frac{۱}{n} + \frac{\bar{x}^۲}{\Sigma x^۲ - n\bar{x}^۲}}}$$

بنابراین آمارهٔ $\frac{a - \alpha}{S_a}$ توزیع t با ۲ − n درجهٔ آزادی دارد. همچنین فاصلهٔ اطمینان ۱۰۰(∝ − ۱) درصدی برای ∝ عبارت است از $a \pm t_{\frac{\alpha}{۲}; n-۲} . S_a$.

مثال ۱۳ـ۷ براساس داده‌های مثالهای ۱۳ـ۳ و ۱۳ـ۴ :

الف) آیا می‌توان در سطح معنی‌دار یک درصد ادعا کرد که خط رگرسیون جامعه محور yها را در بالاتر از ۲۵ قطع می‌کند؟

ب) فاصله اطمینان ۹۹ درصدی برای عرض از مبدأ خط رگرسیون جامعه تشکیل دهید.

الف)

۱. فرضها: $H_0: \alpha \leq ۲۵$

$H_1: \alpha > ۲۵$

۲. آماره آزمون: قبلاً در مثالهای ۳ـ۱۳ و ۴ـ۱۳ مقادیر $\Sigma x^2 = ۳۲۱$ ، $\bar{x} = ۵/٦٦۷$، $a = ٦/۷۸۹$ و $S_e = ۲/۹۱۸$ را حساب کردیم. در اینجا کافی است ابتدا S_a و سپس t را حساب کنیم.

$$S_a = \frac{۲/۹۱۸}{\sqrt{\frac{۱}{۹} + \frac{(۵/٦٦۷)^2}{۳۲۱ - ۹(۵/٦٦۷)^2}}} = ۲/۷٦۲$$

$$t = \frac{٦/۷۸۹ - ۲۵}{۲/۷٦۲} = -٦/۵۹۳$$

۳. مقدار بحرانی: داریم $n = ۹$ و $\alpha = ۰/۰۱$ پس:

$$t_{\alpha, n-2} = t_{۰/۰۱, ۷} = ۲/۹۹۸$$

٤. تصمیم‌گیری: چون $t = -٦/۵۹۳$ بزرگتر از ۲/۹۹۸ نیست نمی‌توان فرض صفر را رد کرد؛ بنابراین ادعای اینکه خط رگرسیون جامعه محور yها را در بالاتر از ۲۵ قطع می‌کند مردود است.

ب) براساس جدول، $t_{۰/۰۰۵, ۷} = ۳/٤۹۹$ است؛ بنابراین:

$$٦/۷۸۹ - (۳/٤۹۹)(۲/۷٦۲) \leq \alpha \leq ٦/۷۸۹ + (۳/٤۹۹)(۲/۷٦۲)$$

و یا:

$$-۲/۸۷۵ \leq \alpha \leq ۱٦/٤۵۳$$

٤ـ٤ـ۱۳ پیش‌بینی میانگین پاسخ برای یک مقدار معین x

مهمترین هدف در مطالعهٔ رگرسیون ممکن است استفاده از مدل رگرسیون برای برآورد میانگین متغیر پیوسته به ازای یک مقدار معین متغیر مستقل x، مثلاً x_0، باشد، یعنی $E(y \mid x_0) = \alpha + \beta x_0$. ثابت می‌شود که می‌توان برای برآوردکنندهٔ $a + bx_0$ خطای معیار زیر را تعریف کرد:

$$S_{\hat{y}|x_\circ} = S_e\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_\circ - \bar{x})^2}{\Sigma x^2 - n\bar{x}^2}}$$

بنابراین آمارهٔ آزمون؛ $t = \frac{(a+bx_\circ) - (\alpha + \beta x_\circ)}{S_{\hat{y}|x_\circ}}$ با n−۲ درجه آزادی خواهد بود. همچنین فاصلهٔ اطمینان $(\alpha - 1)$ ۱۰۰ درصدی برای y ا $x_\circ$ برابر است با $(a+bx_\circ) \pm t_{\frac{\alpha}{2};\,n-2} \cdot S_{\hat{y}|x_\circ}$.

فرمول $S_{\hat{y}|x_\circ}$ نشان می‌دهد که وقتی $x_\circ$ به $\bar{x}$ نزدیک است، خطای معیار کوچکتر از موقعی است که از آن دور است. در نتیجه در حالت اول فاصله اطمینان کوتاهتر بوده و پیش‌بینی دقیقتر است.

اگر بخواهیم یک تک پاسخ برای مقدار معین x، مثلاً $x_\circ$، پیش‌بینی کرده، سپس استنباطهای آماری مختلفی به عمل آوریم محاسبات همانند فوق است بجز اینکه خطای معیار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{خطای معیار برآورد شده برای تک پاسخ} = S_e\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_\circ - \bar{x})^2}{\Sigma x^2 - n\bar{x}^2}}$$

مثال ۸ـ۱۳ مجدداً داده‌های مثالهای ۳ـ۱۳ و ٤ـ۱۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید شرکت برای سال آینده ٦ میلیون ریال برای تبلیغات بودجه پیش‌بینی کرده است.

الف) انتظار دارید تعداد فروش چقدر باشد؟

ب) فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین تعداد فروش ناشی از ٦ میلیون ریال تبلیغات شرکت تشکیل دهید.

قبلاً مقادیر $\Sigma x^2 = ۳۲۱$، $\bar{x} = ۵/٦٦۷$، $a = ٦/۷۸۹$، $b = ۲/۲۹۲$ و $S_e = ۲/۹۱۸$ را حساب کردیم.

الف) تعداد فروش با خط رگرسیون برآوردی قابل پیش‌بینی است،

$$\hat{y} = ٦/۷۸۹ + ۲/۲۹۲x$$

$$\hat{y}_{x=٦} = ٦/۷۸۹ + ۲/۲۹۲\,(٦)$$

$$= ۲۰/۵٤۱$$

بنابراین انتظار داریم با هزینه تبلیغ ٦ میلیون ریال به طور متوسط ۲۰/۵٤۱ هزار واحد (یا ۲۰۵٤۱ واحد) کالا به فروش رسد.

ب) مقدار $t_{۰/۰۲۵,۷} = ۲/۳۶۵$ را از جدول به دست می‌آوریم. همچنین خطای معیار برابر است با:

$$S_{\hat{y}|x=۶} = ۲/۹۱۸\sqrt{\frac{۱}{۹} + \frac{(۶-۵/۶۶۷)^۲}{۳۲۱ - ۹(۵/۶۶۷)^۲}}$$
$$= ۰/۹۸۷$$

بنابراین فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین تعداد فروش ناشی از ۶ میلیون ریال تبلیغات به دو صورت زیر است:

$$۲۰/۵۴۱ - (۲/۳۶۵)(۰/۹۸۷) \leq E(y \mid x=۶) \leq ۲۰/۵۴۱ + (۲/۳۶۵)(۰/۹۸۷)$$

و یا:

$$۱۸/۲۰۶ \leq E(y \mid x=۶) \leq ۲۲/۸۷۵$$

تمرین

۱. این داده‌ها را در نظر بگیرید:

x	۵	۷	۶	۴	۵	۶
y	۱۴	۱۰	۱۲	۱۵	۱۲	۱۰

الف) معادلهٔ خط رگرسیون را برآورد کنید.
ب) خطای معیار برآورد را حساب کنید.
ج) فرض $\beta \geq ۲/۵$ را در مقابل $\beta < ۲/۵$ در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید.
د) فرض $\alpha = ۰$ را در مقابل $\alpha \neq ۰$ در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید.
هـ) فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای β تشکیل دهید.

۲. داده‌های زیر نشان‌دهندهٔ تعداد سالهایی است که ۱۰ نفر زبان آلمانی خوانده و نمره‌هایی که گرفته‌اند:

تعداد سالهای مطالعه	۳	۴	۴	۲	۵	۳	۴	۵	۳	۲
نمره	۵۷	۷۸	۷۲	۵۸	۸۹	۶۳	۷۳	۸۴	۷۵	۴۸

الف) معادلهٔ خط رگرسیون را برآورد کنید.
ب) خطای معیار برآورد را محاسبه کنید.
ج) فرض $\beta = ۱۲/۵$ را در مقابل $\beta \neq ۱۲/۵$ در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید.

د) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای β تشکیل دهید.

ه) فرض کنید هدف اصلی از این بررسی آن بوده است که میانگین نمره را برای شخصی که دو سال زبان آلمانی می‌آموزد برآورد کنند. پس از برآورد نمره مورد نظر، فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای آن تشکیل دهید.

۳. در حسابداری قیمت تمام شده هزینهٔ سربار را براساس سطوح تولید برآورد می‌کنند. فردی اطلاعات زیر را در مورد هزینه‌های سربار و تعداد تولید کارخانجات مختلف در صنعتی خاص جمع‌آوری کرده، قصد دارد معادلهٔ خط رگرسیون را برآورد کند.

٤٠	٣٧	٣٠	٤٨	٣٩	٥٦	٣٥	٥٣	٤٢	٤٠	سطح تولید
١٧٨	١٥٣	١١٦	٢٣٤	١٧٣	٢٨٠	١٥٥	٢٧٢	١٧٠	١٩١	هزینه سربار

الف) معادلهٔ خط رگرسیون را برای حسابداران قیمت تمام شده پیدا کنید.

ب) میانگین هزینهٔ سربار را وقتی ۵۰ واحد کالا تولید شود برآورد کنید.

ج) خطای معیار برآورد را محاسبه کنید.

د) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین هزینهٔ سربار به ازای سطح تولید ۵۰ واحد تشکیل دهید.

۱۳ـ۵ رگرسیون و تحلیل واریانس

در قسمت قبل گفتیم که چطور می‌توان فرض $\beta = 0$ را آزمون کرد. اگر فرض $\beta = 0$ تأیید شود نشان می‌دهد رابطه خطی بین x و y وجود ندارد. با استفاده از تحلیل واریانس نیز می‌توان وجود رابطهٔ خطی بین x و y را آزمون کرد.

قبلاً گفتیم ایده اساسی تحلیل واریانس مبتنی بر نمایش میزان کل تغییرات یک مجموعه آماری به صورت جمع چند عبارت است که بتوان هریک را به منشأ یا علت خاص وجود تغییرات نسبت داد. اگر در رگرسیون، تغییرات y را نتوان به تغییرات x نسبت داد آنگاه وجود رابطه خطی بین x و y مردود است.

کل تغییرات، SST، عبارت است از اختلاف بین y های مشاهده شده از میانگین خود $(\bar{y})$. به عبارت دیگر:

$$SST = \Sigma (y - \bar{y})^2 = \Sigma y^2 - \frac{1}{n} (\Sigma y)^2$$

شاخصی که برای نمایش تغییرات توضیح داده شده به کار می‌رود SS(Tr) است که

عبارت است از اختلاف بین y های برآوردی ($\hat{y}$) از میانگین خود ($\bar{y}$). به عبارت دیگر:

$$SS(Tr) = \Sigma(\hat{y} - \bar{y})^۲ = a\Sigma y + b\Sigma xy - \frac{۱}{n}(\Sigma y)^۲$$

بدیهی است که منبع تغییرات ناشی از خطا (SSE) تفاضل بین SST و SS(Tr) است، یعنی:

$$SSE = SST - SS(Tr)$$

برای انجام آزمون فرض در خصوص $\beta = ۰$ اکنون می‌توانیم جدول تحلیل واریانس را به صورت جدول شماره ۱ـ۱۳ نشان دهیم.

جدول ۱ـ۱۳ جدول تحلیل واریانس در خصوص رگرسیون برآوردی

منبع تغییرات	مجموع توانهای دوم	درجه آزادی	میانگین توانهای دوم	F
تیمار (x)	SS(Tr)	۱	MS(Tr)	$F = \frac{MS(Tr)}{MSE}$
خطا	SSE	n−۲	$MSE = \frac{SSE}{n-۲}$	
جمع	SST	n−۱		

چنانچه مقدار آماره آزمون، F، بزرگتر از مقدار بحرانی باشد فرض صفر در سطح معنی‌دار α رد می‌شود و می‌توان فرض عدم رابطه خطی بین x و y را مردود دانست.

مثال ۹ـ۱۳ مجدداً داده‌های مثال ۲ـ۱۳ را که معادلهٔ خط آن طبق محاسبات مثال ۳ـ۱۳ به صورت $y = ۶/۷۸۹ + ۲/۲۹۲x$ شد در نظر می‌گیریم:

هزینه تبلیغات (x)	۳	۵	٤	۷	۹	٦	۵	٤	۸
تعداد فروش (y)	۱۱	۲۰	۱٦	۲٤	۲٦	۱۵	۲۱	۱۸	۲۷

آزمون فرض در خصوص رابطه خطی بین x و y را در سطح معنی‌دار ۵ درصد برگزار کنید.

۱. فرضها: $H_۰: \beta = ۰$

$H_۱: \beta \neq ۰$

۲. آماره آزمون: با محاسبه خواهیم داشت $\Sigma x = ۵۱$، $\Sigma y = ۱۷۸$، $\Sigma xy = ۱۰۸۲$

و $\Sigma y^2 = ۳۷۴۸$. پس:

$$SST = ۳۷۴۸ - \frac{۱}{۹}(۱۷۸)^۲ = ۲۲۷/۵۵۵$$

$$SS(Tr) = ۶/۷۸۹\,(۱۷۸) + ۲/۲۹۲\,(۱۰۸۲) - \frac{۱}{۹}(۱۷۸)^۲ = ۱۶۷/۹۴۱$$

$$SSE = ۲۲۷/۵۵۵ - ۱۶۷/۹۴۱ = ۵۹/۶۱۴$$

بقیه محاسبات در جدول ۲ـ۱۳ آورده شده است.

جدول ۲ـ۱۳ جدول تحلیل واریانس برای مثال ۹ـ۱۳

منبع تغییرات	مجموع توانهای دوم	درجه آزادی	میانگین توانهای دوم	F
تیمار (x)	۱۶۷/۹۴۱	۱	۱۶۷/۹۴۱	$\frac{۱۶۷/۹۷۱}{۸/۵۱۲} = ۱۹/۷۲$
خطا	۵۹/۶۱۴	۹ − ۲ = ۷	۸/۵۱۶	
جمع	۲۲۷/۵۵۵	۹ − ۱ = ۸		

۳. مقدار بحرانی: داریم ۹ = n و ۰/۰۵ = α پس:

$$F_{\alpha,۱,n-۲} = F_{۰/۰۵,۱,۷} = ۵/۵۹$$

۴. تصمیم‌گیری: چون ۱۹/۷۲ = F بزرگتر از مقدار بحرانی است بنابراین فرض $\beta = ۰$ مردود است. به عبارت دیگر شواهد کافی دال بر رابطه خطی بین x و y موجود است.

تمرین

۱. می‌خواهیم بدانیم آیا رابطهٔ خطی بین قد و ضریب هوشی وجود دارد یا خیر. بدین منظور نمونه‌ای متشکل از ۱۰ نفر را به صورت تصادفی انتخاب کرده، دو شاخص فوق را در مورد آنها حساب کرده‌ایم که بدین قرارند:

قد (به سانتیمتر)	۱۷۰	۱۶۸	۱۶۵	۱۷۲	۱۸۰	۱۸۵	۱۶۸	۱۶۰	۱۷۳	۱۸۲
ضریب هوشی (IQ)	۹۰	۸۵	۹۲	۸۸	۷۰	۹۱	۷۶	۶۵	۶۲	۷۵

الف) معادلهٔ رگرسیون را برآورد کنید.

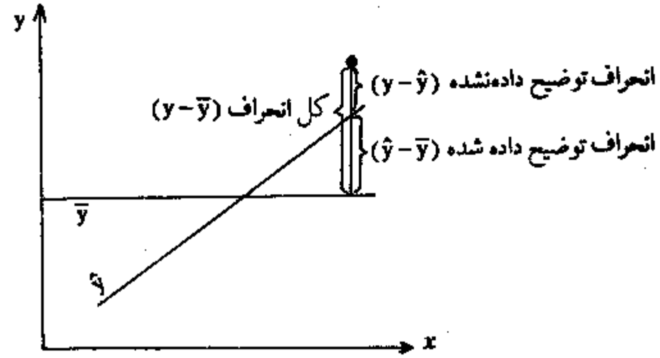
ب) با استفاده از تحلیل واریانس آیا در سطح ۹۵ درصد اطمینان می‌توان گفت ضریب هوشی افراد تابع قدشان نیست؟

۱۳-۶ همبستگی

تحلیل همبستگی ابزاری آماری است که به وسیلهٔ آن می‌توان درجه‌ای که یک متغیر به متغیری دیگر، از نظر خطی، مرتبط است اندازه گیری کرد. همبستگی را معمولاً با تحلیل رگرسیون به کار می‌برند. همبستگی معیاری است که برای تعیین میزان ارتباط دو متغیر استفاده می‌شود. در همبستگی دربارهٔ دو معیار بحث می‌شود: ضریب تعیین و ضریب همبستگی. توضیح این دو معیار، موضوع بحث این قسمت است.

۱۳-۶-۱ ضریب تعیین

ضریب تعیین مهمترین معیاری است که با آن می‌توان رابطهٔ بین دو متغیر x و y را توضیح داد. به شکل ۱۳-۵ نگاه کنید. در این شکل انحراف یکی از مشاهدات از میانگین مشاهدات و خط رگرسیون نشان داده می‌شود. اگر y_1، y_2، ...، y_n مشاهدات و $\bar{y}$ میانگین مشاهدات باشد، آنگاه میزان انحراف مشاهدات حول میانگین خود، برابر $\Sigma(y-\bar{y})^2$ خواهد بود. حال انحراف دیگری را مطرح می‌کنیم و آن میزان انحراف مشاهدات با مقداری است که خط رگرسیون برآورد می‌کند. به عبارت دیگر می‌خواهیم میزان انحراف بین مشاهدات (y) و برآورد آن به وسیلهٔ خط رگرسیون ($\hat{y}$) را اندازه بگیریم. مجموع این انحراف را برای کل مشاهدات با $\Sigma(y-\hat{y})^2$ نشان می‌دهیم.



شکل ۱۳-۵ ارزش رگرسیون در کاهش انحرافات y

حال نسبت $\frac{\Sigma(y-\hat{y})^2}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$ را در نظر بگیرید. با فرض ثابت بودن مقدار $\Sigma(y-\bar{y})^2$، هرچقدر $\Sigma(y-\hat{y})^2$ کمتر شود، نشان می‌دهد که خط رگرسیون توانسته است تغییرات

در x را توضیح دهد. به عبارت دیگر هر چقدر $\Sigma(y-\hat{y})^2$ کمتر شود نشان می‌دهد که خط رگرسیون توانسته است رابطه‌ای مناسب بین دو متغیر x و y برقرار سازد. حداکثر مقدار $\Sigma(y-\hat{y})^2$ برابر با $\Sigma(y-\bar{y})^2$ و حداقل آن برابر با صفر است؛ بنابراین استفاده از $1-\frac{\Sigma(y-\hat{y})^2}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$ که آن را ضریب تعیین نامیده، با r^2 نشان می‌دهیم، کار را ساده‌تر می‌کند. این مقدار همیشه بین ۰ تا ۱ است. اگر $\Sigma(y-\hat{y})^2$ صفر باشد، نشان می‌دهد که خط رگرسیون دقیقاً توانسته است تغییرات y را به تغییرات مستقل x نسبت دهد، در این صورت $r^2 = 1$ است. اگر $\Sigma(y-\hat{y})^2$ برابر $\Sigma(y-\bar{y})^2$ باشد، نشان می‌دهد که خط رگرسیون هرگز نتوانسته است تغییرات y را به تغییرات مستقل x نسبت دهد، در این صورت $r^2 = 0$ است. مقادیر دیگر بین این دو حد قرار می‌گیرند. این فرمول از کارآیی محاسباتی بیشتری برخوردار است:

$$r^2 = \frac{a\Sigma y + b\Sigma xy - n\bar{y}^2}{\Sigma y^2 - n\bar{y}^2}$$

مثال ۱۰-۱۳ برای دو دسته از داده‌های زیر:

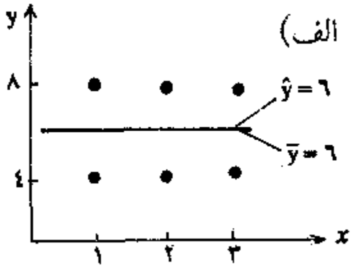
دستهٔ دوم		دستهٔ اول	
y	x	y	x
٤	۱	۳	۱
۸	۱	٦	۲
٤	۲	۹	۳
۸	۲	۱۲	٤
٤	۳	۱۵	۵
۸	۳	۱۸	٦

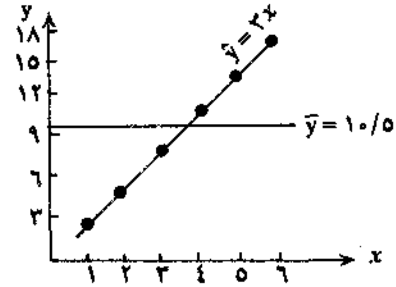
الف) معادلهٔ خط رگرسیون را به دست آورده، خط رگرسیون را همراه با نمودار پراکنش در نمودار واحدی رسم کنید.

ب) ضرایب تعیین را حساب کنید.

ج) ضرایب به دست آمده را تعبیر کنید.

الف)





ب) ضریب تعیین با استفاده از $r^۲ = ۱ - \frac{\Sigma(y-\hat{y})^۲}{\Sigma(y-\bar{y})^۲}$.

حالت دوم

چون $\hat{y}=\bar{y}=٦$است، پس:

$$r^۲ = ۱ - \frac{\Sigma(y-٦)^۲}{\Sigma(y-٦)^۲} = ۱ - ۱ = ۰$$

حالت اول

چون تمام نقاط پراکنش روی خط رگرسیون قرار دارند پس $\Sigma(y-\hat{y})^۲ = ۰$ است؛ بنابراین:

$$r^۲ = ۱ - \frac{۰}{\Sigma(y-\bar{y})^۲} = ۱ - ۰ = ۱$$

ج)

حالت دوم

ضریب تعیین $r^۲ = ۰$ نشان می‌دهد که خط رگرسیون برآوردکننده‌ای کاملاً غیردقیق است. به عبارت دیگر هیچ مقدار از تغییرات y را نمی‌توان به تغییرات در x نسبت داد.

حالت اول

ضریب تعیین $r^۲ = ۱$ نشان می‌دهد که خط رگرسیون برآوردکننده‌ای کاملاً دقیق است. به عبارت دیگر کل تغییرات y را می‌توان به تغییرات در x نسبت داد.

مثال ۱۱ـ۱۳ با مراجعه به داده‌های مثالهای ۳ـ۱۳ و ٤ـ۱۳ ، ضریب تعیین را حساب کرده، آن را تعبیر کنید.

با مراجعه به مثالهای ۳ـ۱۳ و ٤ـ۱۳ داریم: $\Sigma y = ۱۷۸$ ، $a = ٦/۷۸۹$ ، $b = ۲/۲۹۲$ ، $\Sigma xy = ۱۰۸۲$ و $\bar{y} = ۱۹/۷۷۸$. همچنین $\Sigma y^۲ = ۳۷٤۸$ خواهد بود؛ بنابراین:

$$r^۲ = \frac{(٦/۷۸۹)(۱۷۸) + (۲/۲۹۲)(۱۰۸۲) - (۹)(۱۹/۷۷۸)^۲}{۳۷٤۸ - (۹)(۱۹/۷۷۸)^۲}$$

$$= ۰/۷۳۸$$

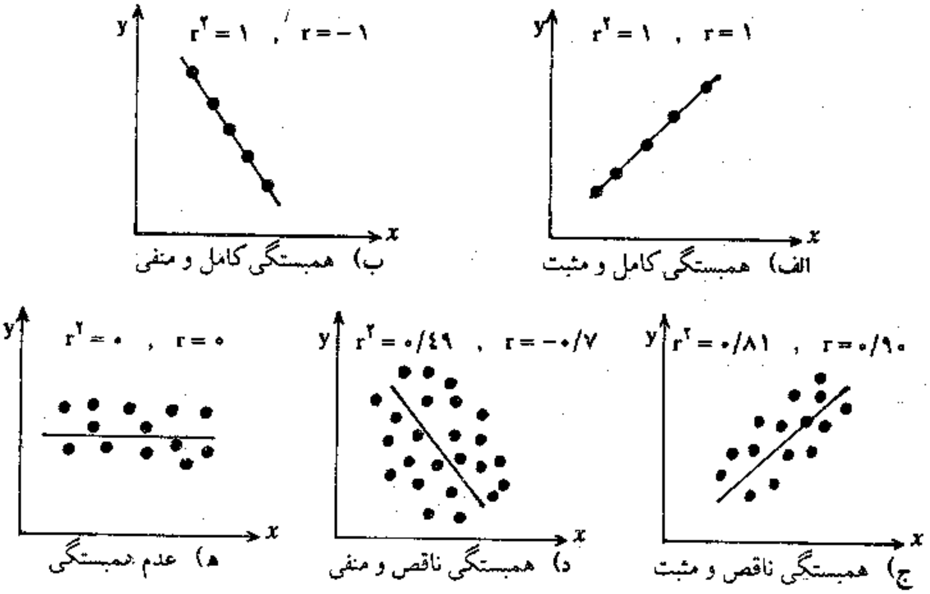
$r^۲ = ۰/۷۳۸$ نشان می‌دهد که ۷۳/۸ درصد از تغییرات y قابل استناد به تغییرات x است و

بقیه تغییرات y (۲۶/۲ درصد) ناشی از شانس (عوامل غیر از x) است.

۲-۶-۱۳ ضریب همبستگی

اگر از ضریب تعیین، ریشهٔ دوم بگیریم، به مقدار به دست آمده ضریب همبستگی می‌گوییم و آن را با r نشان می‌دهیم ($r=\sqrt{r^2}$). می‌دانیم که ریشهٔ دوم یک عدد می‌تواند منفی و یا مثبت باشد. سؤال اینجاست که چطور می‌توان علامت ضریب همبستگی را تشخیص داد؟ علامت ضریب همبستگی (r)، همان علامت شیب خط رگرسیون (b) است، یعنی اگر شیب خط رگرسیون مثبت باشد، ضریب همبستگی نیز مثبت و اگر شیب خط رگرسیون منفی باشد، ضریب همبستگی نیز منفی است. همچنین اگر شیب خط رگرسیون صفر باشد ($b = ۰$)، ضریب همبستگی نیز صفر می‌شود ($r = ۰$).

ضریب همبستگی شدت رابطه و همچنین نوع رابطه، مستقیم یا معکوس، را نشان می‌دهد. از آنجاکه r^2 همواره بین ۰ و ۱ است؛ ریشه دوم آن، r، همواره بین ۱ و ۱− است. در شکل ۶-۱۳ چند نمودار پراکنش و خط رگرسیون متناظر آن همراه با مقادیر r^2 و r رسم شده است.



شکل ۶-۱۳ ارتباط r، r^2 و شیب خط

ضریب تعیین نسبت به ضریب همبستگی معیار گویاتری است. برای روشن‌شدن

مطلب فرض کنید برای یک دسته داده‌ها $r = ۰/۸۰$ باشد و برای یک دستهٔ دیگر $r = ۰/۴۰$. گمراه کننده است اگر بگوییم ضریب ۰/۸۰ «دو برابر قوی‌تر» از ضریب ۰/۴۰ است. وقتی $r = ۰/۸۰$ باشد $r^۲ = (۰/۸۰)^۲ = ۰/۶۴$ است؛ یعنی ٦٤ درصد از تغییرات y ناشی از تغییرات x است. وقتی $r = ۰/۴۰$ باشد $r^۲ = (۰/۴۰)^۲ = ۰/۱٦$ است یعنی ۱٦ درصد از تغییرات y منبعث از تغییرات x است؛ بنابراین ضریب همبستگی ۰/۸۰ «چهار برابر قوی‌تر» از ضریب همبستگی ۰/۴۰ است. با همین استدلال می‌توان گفت ضریب همبستگی ۰/٦۰ «نه برابر قوی‌تر» از ضریب هبستگی ۰/۲۰ است.

گفتیم که ضریب هبستگی از ریشهٔ دوم ضریب تعیین به دست می‌آید. اگر ضریب تعیین مشخص نباشد، و یا نخواهیم آن را حساب کنیم، می‌توان از این فرمول استفاده کرد:

$$r = \frac{\Sigma x y - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\Sigma x^۲ - n\bar{x}^۲}\sqrt{\Sigma y^۲ - n\bar{y}^۲}}$$

مثال ۱۲ـ۱۳ با مراجعه به مثالهای ۳ـ۱۳ و ٤ـ۱۳ ضریب همبستگی بین هزینه تبلیغات و تعداد فروش را محاسبه کنید.

با مراجعه به مثالهای ۳ـ۱۳ و ٤ـ۱۳ داریم: $\Sigma x = ٥۱$ ، $\Sigma xy = ۱۰۸۲$ ، $\bar{x} = ٥/٦٦۷$ ، $\bar{y} = ۱۹/۷۷۸$ و $\Sigma x^۲ = ۳۲۱$. همچنین $\Sigma y^۲ = ۳۷٤۸$ است؛ بنابراین:

$$r = \frac{۱۰۸۲ - (۹)(٥/٦٦۷)(۱۹/۷۷۸)}{\sqrt{۳۲۱ - ۹(٥/٦٦۷)^۲}\sqrt{۳۷٤۸ - ۹(۱۹/۷۷۸)^۲}}$$

$$= ۰/۸٥۹$$

۳ـ٦ـ۱۳ آزمون معنی‌دار بودن r

ضریب همبستگی با توجه به نمونه‌ای مشخص محاسبه می‌شود. بدیهی است که این ضریب، که بعضی مواقع ضریب همبستگی نمونه‌ای خوانده می‌شود، از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر می‌یابد. حال سؤال اینجاست که آیا بین دو متغیر x و y که ضریب هبستگی آن را تعیین کردیم همبستگی معنی‌داری وجود دارد یا نه؟ به عبارت دیگر، آیا می‌توان به وجود یک رابطه علت و معلولی خطی اذعان داشت و یا ضریب همبستگی

به دست آمده ناشی از شانس و تصادف بوده و ضریب همبستگی جامعه، که آن را با ρ نشان می‌دهیم، برابر صفر است؟

مثلاً فرض کنید که دو تاس قرمز و سبز پنج مرتبه پرتاب شده‌اند و شماره‌های ظاهر شده در هر پرتاب به این صورت بوده است:

تاس قرمز (x)	۴	۲	۴	۲	۶
تاس سبز (y)	۵	۲	۶	۱	۴

اگر ضریب همبستگی را برای این دو تاس حساب کنیم، $r = ۰/۶۶$ به دست می‌آید. واضح است که این دو تاس از هم مستقلند و ضریب همبستگی نسبتاً بالای ۰/۶۶ به صورت شانسی بوده است. اگر نمونه‌ای دیگر بگیریم ممکن است این ضریب خیلی کوچکتر شود.

برای استنباط در خصوص ضریب همبستگی جامعه (ρ) ناچار به قبول فرضیه‌هایی در مورد توزیع مشاهدات هستیم. در تحلیل همبستگی نرمال، همان فرضیه‌هایی که در تحلیل رگرسیون نرمال مطرح کردیم پابرجا بوده بجز این فرض که x ها ثابت هستند. در اینجا به جای این فرض، می‌پذیریم که متغیر تصادفی X نیز توزیع نرمال دارد.

حال می‌خواهیم آزمون کنیم که آیا دو متغیر تصادفی X و Y همبسته‌اند یا نه. به عبارت دیگر آیا ضریب همبستگی جامعه برابر صفر است ($\rho = ۰$) یا نه ($\rho \neq ۰$)؟ آمارهٔ مناسب برای آزمون در خصوص صفر بودن ضریب همبستگی جامعه عبارت است از:

$$t = \frac{r-\rho}{\sqrt{\frac{۱-r^۲}{n-۲}}}$$

که دارای توزیع t استیودنت با $n-۲$ درجه آزادی است.

مثال ۱۳-۱۳ با مراجعه به مثال پرتاب دو تاس فوق، آیا ضریب همبستگی محاسبه شده ۰/۶۶ در پرتاب ۵ بار دو تاس در سطح ۵ درصد معنی‌دار است؟

۱. فرضها: $H_۰ : \rho = ۰$

$H_۱ : \rho \neq ۰$

۲. آماره آزمون:

$$t = \frac{۰/۶۶ - ۰}{\sqrt{\frac{۱-(۰/۶۶)^۲}{۵-۲}}} = ۱/۵۲۲$$

۳. مقادیر بحرانی: داریم ۵ = n و ۰/۰۵ = ∝ پس:

$$t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۲} = t_{۰/۰۲۵, ۳} = \pm ۳/۱۸۲$$

٤. تصمیم‌گیری: چون ۱/۵۲۲ = t بین ۳/۱۸۲ و ۳/۱۸۲- قرار می‌گیرد نمی‌توان فرض صفر را رد کرد؛ بنابراین شماره‌های ظاهر شده در دو تاس مستقلند و ضریب همبستگی به دست آمده معنی‌دار نیست.

مثال ۱٤ـ۱۳ با مراجعه به مثال ۱۲ـ۱۳، آیا ضریب همبستگی محاسبه شده ۰/۸۵۹ در سطح یک درصد معنی‌دار است؟

۱. فرضها: $H_۰: \rho = ۰$

$H_۱: \rho \neq ۰$

۲. آماره آزمون:

$$t = \frac{۰/۸۵۹ - ۰}{\sqrt{\frac{۱-(۰/۸۵۹)^۲}{۹-۲}}} = ٤/٤۳۹$$

۳. مقادیر بحرانی: داریم ۹ = n و ۰/۰۱ = ∝ پس:

$$t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۲} = t_{۰/۰۰۵, ۷} = \pm ۳/٤۹۹$$

٤. تصمیم‌گیری: چون ٤/٤۳۹ = t بین ۳/٤۹۹- و ۳/٤۹۹+ قرار نمی‌گیرد، فرض صفر مردود است؛ بنابراین می‌توان گفت که بین هزینه‌های تبلیغات و تعداد فروش همبستگی معنی‌داری وجود دارد.

استفاده از آمارهٔ t به صورت فوق تنها برای آزمون فرض $\rho = ۰$ در مقابل $\rho \neq ۰$ مناسب است. اگر بخواهیم فرض $\rho = \rho_۰$ را در مقابل $\rho \neq \rho_۰$ آزمون کنیم (که $\rho_۰ \neq ۰$ است)، باید شیوهٔ دیگری را به کار گیریم. پیشنهاد فیشر[1] آن است که r را به این صورت به Z_r تبدیل کنیم:

1. Fischer

$$Z_r = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

که در آن ln لگاریتم طبیعی است. می‌توان نشان داد که Z_r تقریباً از توزیع نرمال با میانگین $E(Z_r) = \frac{1}{2} \ln [(1+\rho)/(1-\rho)]$ و واریانس $V(Z_r) = \frac{1}{n-3}$ برخوردار است.

برای آنکه فرض صفر را که در آن ρ مقدار دیگری غیر از صفر باشد را آزمون کنیم، آمارهٔ آزمون آن که تقریباً توزیع نرمال دارد، به این صورت می‌آید:

$$Z = \frac{Z_r - E(Z_r)}{1/\sqrt{n-3}}$$

مثال ۱۵ـ۱۳ با مراجعه به مثال ۱۲ـ۱۳ آیا می‌توان گفت ضریب همبستگی جامعه در سطح ۵ درصد برابر با ۰/۹۵ است؟

۱. فرضها: $H_0 : \rho = 0/95$

$H_1 : \rho \neq 0/95$

۲. آماره آزمون:

$$E(Z_r) = \frac{1}{2} \ln [(1+0/95)/(1-0/95)]$$

$$= 1/832$$

$$Z_r = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0/859}{1-0/859}$$

$$= 1/289$$

$$Z = \frac{1/289 - 1/832}{1/\sqrt{9-3}}$$

$$= -1/33$$

۳. مقادیر بحرانی: داریم $n = 9$ و $\alpha = 0/05$ پس:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0/025} = \pm 1/96$$

٤. تصمیم‌گیری: چون $Z = -1/33$ بین $-1/96$ و $1/96$ قرار می‌گیرد نمی‌توان فرض صفر را رد کرد، نتیجه اینکه ضریب همبستگی جامعه می‌تواند برابر ۰/۹۵ باشد.

@Fileaccunting

تمرین

۱. داده‌های زیر زمان مونتاژ یک رادیوی دو موج کوچک را در صبح و بعد از ظهر (برحسب ساعت) نشان می‌دهد:

x(صبح)	۱/۵	۱/۶	۱/۴	۱/۵	۱/۳	۱/۵	۱/۴	۱/۲	۱/۳	۱/۷	۱/۴	۱/۳
y(بعد از ظهر)	۱/۴	۱/۷	۱/۵	۱/۸	۱/۴	۱/۵	۱/۷	۱/۸	۱/۶	۱/۵	۱/۷	۱/۶

ضریب همبستگی این داده‌ها را محاسبه کنید.

۲. در تمرین قبل، مستقل بودن زمان مونتاژ رادیو را در صبح و عصر، در سطح معنی‌دار ۵ درصد محاسبه کنید.

۳. اگر $n = 6$، $\Sigma x = 30$، $\Sigma y = 180$، $\Sigma xy = 1000$ و $\Sigma x^2 = 200$ باشد، ضریب همبستگی را حساب کنید.

۴. اگر برای داده‌های خاصی $n = 18$ و $r = -0/64$ باشد، فرض $\rho \geqq -0/30$ را در مقابل فرض $\rho < -0/30$ محاسبه کنید.

۵. ضریب تعیین را برای تمرین ۳ حساب کنید. تعبیر مقدار به دست آمده چیست؟

۱۳ـ۷ احتیاط در استفاده از خط رگرسیون و همبستگی

رگرسیون و همبستگی ابزارهایی هستند که در صورت استفادهٔ صحیح از آنها مفیدند، ولی بعضی مواقع از آنها استفادهٔ نادرست می‌شود. استفادهٔ نادرست از این ابزارها در پیش‌بینی، باعث نتایج غیر دقیق و تصمیمات نامطلوب می‌شود. عمده‌ترین اشتباهات معمول در استفاده از این ابزارها عبارتند از:

۱. **تعمیم روند برای خارج از دامنهٔ مشاهدات.** از خط رگرسیون معمولاً برای پیش‌بینی استفاده می‌شود. یکی از اشتباهات معمول این است که بخواهیم روند را برای موردی تعمیم دهیم که خارج از دامنهٔ مشاهداتی باشد که بر مبنای آنها خط رگرسیون برآورد شده است. مثلاً هزینه تبلیغات در مثال ۲ـ۱۳ بین ۳ تا ۹ در نوسان بود. اگر مثلاً بخواهیم تعداد فروش را برای حالتی پیش‌بینی کنیم که هزینه تبلیغات ۲۰ باشد، پیش‌بینی تعداد فروش به احتمال زیاد نادرست خواهد بود.

۲. **فقدان رابطهٔ علت و معلولی واقعی.** گاهی همبستگی قوی بین دو متغیری پیدا می‌کنیم که واقعاً این دو متغیر هیچ رابطهٔ علت و معلولی با هم ندارند. مثلاً بین میزان فروش آدامس و تعداد تصادفاتی که در سطح کشور روی می‌دهد ضریب همبستگی قوی

مثبتی وجود دارد؛ ولی روشن است که بین این دو هیچ رابطهٔ علت و معلولی وجود ندارد. میزان فروش آدامس و تعداد تصادفات هر دو معلول علتی به نام میزان جمعیت هستند.

۳. تعمیم روند گذشته به آینده. تعمیم روند گذشته به آینده در صورتی معقول است که همان شرایطی که در گذشته موجود بوده در آینده نیز وجود داشته باشد. مثلاً در مثال ۲-۱۳ در صورتی می‌توان از خط رگرسیون برای پیش‌بینی استفاده کرد که همان شرایطی که در گذشته موجود بوده، مثل ثابت بودن کیفیت کالای شرکت، ثابت بودن میزان تبلیغات رقبا، ثابت بودن کیفیت کالای رقبا، عدم عرضهٔ کالای جدید و مشابه، ثابت بودن قیمت کالا در آینده نیز ثابت بماند.

٤. تعبیر نادرست از ضرایب تعیین و همبستگی. گاهی تعبیر نادرستی از ضریب همبستگی می‌شود. مثلاً اگر $r = ۰/٦۰$ باشد، غلط است اگر بگوییم خط رگرسیون ۰/٦۰ کل تغییرات در y را توضیح می‌دهد و یا ٦۰ درصد از تغییرات y به دلیل تغییرات در x است، بلکه صحیح آن است که بگوییم اگر $r = ۰/٦۰$ باشد، $r^2 = (۰/٦۰)^2 = ۰/۳٦$ بوده و خط رگرسیون تنها معرف ۳٦ درصد تغییرات y است.

اگر ضریب تعیین را درصد تغییر در متغیر وابسته‌ای بدانیم که به دلیل تغییر در متغیر مستقل ایجاد شده، راه خطا پیموده‌ایم، چرا که r^2 معیاری است که تنها می‌گوید یک متغیر چقدر خوب توانسته است متغیر دیگر را توضیح دهد، ولی نمی‌گوید که چه میزان تغییر در یک متغیر قابل استناد به متغیر دیگر است.

۸-۱۳ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. اگر خط رگرسیون بر هیچ یک از نقاط مشاهده شده منطبق نباشد، می‌توان گفت که خط رگرسیون برآوردکنندهٔ دقیقی نیست. ص ☐ غ ☐

۲. اگر $r = ۰$ باشد، می‌توان گفت که هیچ نوع رابطه‌ای، اعم از خطی و غیرخطی، بین دو متغیر وجود ندارد. ص ☐ غ ☐

۳. ضریب تعیین، معیار گویاتری نسبت به ضریب همبستگی است. ص ☐ غ ☐

٤. خطای معیار برآورد معیاری است که پراکندگی مشاهدات را حول خط رگرسیون نشان می‌دهد. ص ☐ غ ☐

۵. اگر $S_e = ۱$ باشد، می‌توان گفت تمام مشاهدات بر خط رگرسیون قرار می‌گیرند. ص ☐ غ ☐

٦. همواره ضریب تعیین، مقداری بین ۱ و ۱− می‌گیرد. ص ☐ غ ☐

۷. خط حداقل توانهای دوم یا خط رگرسیون خطی است که جمع جبری خطاهایش از بقیه خطوط ممکن دیگر کمتر باشد. ص ☐ غ ☐

۸. اگر ضریب همبستگی بزرگتر از ۰/۷۰ و یا کوچکتر از ۰/۷۰− باشد، می‌توان ادعا کرد که همبستگی بین دو متغیر معنی‌دار است. ص ☐ غ ☐

۹. ضریب تعیین، درصد تغییرات کل متغیر وابسته است که به وسیله خط رگرسیون توضیح داده می‌شود. ص ☐ غ ☐

۱۰. به دلیل استفاده‌های نادرست از رگرسیون و همبستگی، استفاده از آنها توصیه نمی‌شود. ص ☐ غ ☐

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. اگر ضریب همبستگی بین دو متغیری ۰/۶ و دو متغیر دیگر ۰/۳ باشد، می‌توان گفت همبستگی دو متغیر اول «چند برابر قوی‌تر» از دو متغیر دوم است؟

الف) دو برابر ب) سه برابر ج) چهار برابر د) نه برابر

۱۲. معادلهٔ خط رگرسیون که با توجه به نمونه‌ای ۸تایی برآورد شده به صورت $\hat{y} = -5 + 2x$ است. کدام یک از این موارد نمی‌تواند ضریب همبستگی آن باشد؟

الف) ۰/۴۵ ب) ۰/۹۰− ج) ۰/۹۵ د) ۰/۸۵

۱۳. اگر $\Sigma(y-\hat{y})^2 = \Sigma(y-\bar{y})^2$ باشد، آنگاه ضریب همبستگی با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) ۱ یا ۰ ب) ۱− یا ۰ ج) ۱− یا ۱ د) ۱

۱۴. پراکندگی مشاهدات حول خط رگرسیون به وسیلهٔ کدام یک از این عبارتها بهتر توصیف می‌شود؟

الف) $\Sigma(y+\hat{y})^2$ ب) $\Sigma(y-\hat{y})^2$ ج) $\Sigma(y-\bar{y})^2$ د) $\Sigma(y+\bar{y})^2$

۱۵. فرض کنید می‌خواهید فرض $\beta = 0$ را در مقابل فرض $\beta \neq 0$ آزمون کنید. کدام یک از این موارد را باید قبل از بقیه حساب کرد؟

الف) S_b ب) S_e ج) آمارهٔ t د) فرقی نمی‌کند.

۱۶. اگر $r = 0$ باشد، می‌توان گفت دو متغیر ... .

الف) همبستگی با هم ندارند. ب) همبستگی آنها ضعیف است.

ج) همبستگی خطی با هم ندارند. ج) همبستگی آنها غیرخطی است.

براساس این داده‌ها به سؤالات ۱۷ تا ۲۰ پاسخ دهید.

x	۵	۷	۹
y	۲۰	۱۵	۱۳

۱۷. شیب خط رگرسیون برآوردی با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) ۱/۰۰− ب) ۱/۷۵− ج) ۲/۰۰− د) ۲/۷۵−

۱۸. عرض از مبدأ (a) با کدام گزینه برابر است؟

الف) ۱۰/۲۵ ب) ۱۸/۲۵ ج) ۲۸/۲۵ د) ۳۸/۲۵

۱۹. ضریب همبستگی داده‌های فوق با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) ۰/۹۰− ب) ۰/۹۷− ج) ۰/۹۰+ د) ۰/۹۷+

۲۰. فرض کنید ضریب همبستگی داده‌های فوق ۰/۸۰− باشد، برای آزمون فرض استقلال دو متغیر ($\rho = ۰$ در مقابل $\rho \neq ۰$) ناچار به محاسبهٔ آمارهٔ t هستیم. مقدار آمارهٔ مورد نظر با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) ۱/۳۳ ب) ۲/۲۲− ج) ۲/۲۲ د) ۱/۳۳−

مسائل

۲۱. نمونه ۵۰ نفری از افراد یک شهر انتخاب شده‌است که رابطه بین سطح تحصیلات (x، برحسب سال) و درآمد سالانهٔ آنها (y، بر حسب هزار ریال) به وسیلهٔ این معادلهٔ نشان داده می‌شود:

$$\hat{y} = ۱۲۰۰ + ۸۰۰x$$

میانگین درآمد $\bar{y} = ۱۰۰۰۰$، میانگین سطح تحصیل $\bar{x} = ۱۱$، و خطای معیار برآورد حول خط رگرسیون $S_e = ۷۳۰۰$ است.

الف) فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای شیب خط رگرسیون جامعه تشکیل دهید.

ب) آیا رابطه خطی بین سطح درآمد و سطح تحصیل در سطح معنی‌دار ۵ درصد وجود دارد؟

ج) درآمد فردی را که ۱۰ سال تحصیل داشته پیش‌بینی کنید و فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین درآمد وی تشکیل دهید.

د) آیا می‌توان گفت که تحصیل هر سال ارزش ۸۰۰ هزار ریال را دارد؟ چرا؟

۲۲. این داده‌ها نشان‌دهندهٔ میزان حقوق دریافتی و ساعات کار مفید روزانهٔ ۶ کارمند است:

حقوق (بر حسب هزار ریال)	۷۰	۱۱۰	۸۰	۲۰۰	۱۲۰	۹۰
ساعات کار مفید روزانه	۲	۳	۵	۷	۶	۴

الف) معادله‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان ساعات کار مفید را پیش‌بینی کرد.

ب) آیا می‌توان این ادعا را که «۸۰ درصد تغییرات ساعت کار مفید به حقوق دریافتی بستگی دارد» پذیرفت؟ چرا؟

۲۳. برای داده‌های: $n = ۵$ ، $\Sigma x = ۷۹۵$ ، $\Sigma x^2 = ۱۹۶۸۵۱$ ، $\Sigma y = ۲/۴۰$ ، $\Sigma y^2 = ۱/۱۶۸۴$ و $\Sigma xy = ۳۴۸/۲۶$

الف) معادلهٔ خط رگرسیون را برآورد کنید.

ب) ضریب همبستگی دو متغیر x و y را به دست آورید.

ج) آیا می‌توان در سطح معنی‌دار ۹۹ درصد ادعا کرد که دو متغیر x و y مستقلند؟ (به این قسمت با استفاده از تحلیل واریانس جواب دهید).

۲۴. برای داده‌های: $n = ۶$ ، $\Sigma x = ۳۶$ ، $\Sigma x^2 = ۳۰۴$ ، $\Sigma y = ۱۰۸$ ، $\Sigma y^2 = ۲۰۰۸$ و $\Sigma xy = ۷۱۵$

الف) معادلهٔ خط رگرسیون را برآورد کنید.

ب) خطای معیار برآورد را پیدا کنید.

ج) فرض $\beta \le ۰/۳۰۰$ را در مقابل فرض $\beta > ۰/۳۰۰$ در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید.

د) میانگین y را به ازای $x = ۵$ پیش‌بینی کرده، فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای این میانگین تشکیل دهید.

۲۵. داده‌های زیر میزان تجربه (بر حسب هفته) و تعداد کالاهای تولید شده معیوب را برای ۱۲ کارگر انتخابی طی یک روز نشان می‌دهد:

میزان تجربه (به هفته)	۷	۹	۶	۱۴	۸	۱۲	۱۰	۴	۲	۱۱	۱	۸
تعداد کالاهای معیوب	۲۶	۲۰	۲۸	۱۶	۲۳	۱۸	۲۴	۲۶	۳۸	۲۲	۳۲	۲۵

الف) نمودار پراکنش را رسم کنید.

ب) معادلهٔ خط رگرسیون را برآورد نمایید.

ج) تعداد کالای معیوب را برای کارگری با سه هفته تجربه پیش‌بینی کنید.

د) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین تعداد کالاهای معیوب برای کارگری با سه هفته تجربه تشکیل دهید.

هـ) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای شیب خط رگرسیون جامعه (β) تشکیل دهید.

و) ضریب همبستگی را برای این دو متغیر به دست آورید. تعبیر این مقدار به دست آمده چیست؟

ز) در سطح معنی‌دار ۵ درصد آیا می‌توان گفت که این دو متغیر مستقلند؟

۲۶. یکی از کاندیداهای مجلس شورای اسلامی با هفت تن از نمایندگان دورهٔ قبل تهران صحبت کرده و تعداد اعلامیه‌های تبلیغاتی و رأی کسب کردهٔ آنها را جویا شده که به این ترتیب هستند:

تعداد اعلامیه‌های تبلیغاتی (به هزار)	۴۰	۳۵	۶۰	۷۰	۲۰	۴۵	۸۰
تعداد رأی کسب کرده (به میلیون)	۰/۷۰	۰/۶۰	۰/۷۵	۰/۹	۰/۷	۰/۸	۱/۱

الف) معادلهٔ خط رگرسیون را برآورد کنید.

ب) آیا می‌توان ادعا کرد (در سطح معنی‌دار ۵ درصد) که تعداد رأی کسب کردهٔ هر نماینده ارتباطی با تعداد اعلامیه‌های منتشره از سوی وی ندارد؟

۲۷. یکی از مباحث مدیریت مالی رابطهٔ بین میانگین بازده بازار سهام و میانگین بازده سهام خاص است. تحلیلگر سرمایه‌گذاری به شیب خط رگرسیون برای دو متغیر فوق «بتای آن سهام خاص» می‌گوید. اگر بتای سهام خاصی بزرگتر از یک باشد، آن سهام نسبت به تغییرات بازار حساس است و اگر کوچکتر از یک باشد، آن سهام نسبت به تغییرات بازار غیرحساس است. داده‌های زیر میانگین بازده سهامی خاص (y) و میانگین بازده بازار سهام (x) را نشان می‌دهد.

$x(\%)$	۱۲	۱۰	۸	۱۴	۶	۹	۱۱	۱۰	۱۲	۷	۱۱
$y(\%)$	۱۰	۱۱	۷	۱۲	۷	۸	۱۰	۸	۱۳	۷	۱۲

در سطح معنی‌دار ۵ درصد، آزمون کنید آیا بتای این سهام خاص بزرگتر از یک است یا نه؟

۲۸. شرکت مخابرات همواره فرض می‌کرده است که به ازای هر فردِ خانواده روزانه ۱/۵ مکالمهٔ تلفنی وجود دارد؛ ولی گفته می‌شود مردم پرحرف‌تر از این هستند. به صورت تصادفی ۶۴ خانواده انتخاب کرده و شیب خط رگرسیون را حساب کرده‌ایم و عدد ۱/۸ با خطای معیار شیب خط رگرسیون $S_b = ۰/۲$ به دست آمده‌است (در خط رگرسیون مورد نظر x تعداد افراد خانواده و y میانگین تعداد مکالمات تلفنی روزانه آنها بوده است). در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید آیا تعداد مکالمه تلفنی هر فرد خانواده‌ای از آنچه که شرکت مخابرات فرض می‌کرده بیشتر است یا نه؟

پاسخنامهٔ سؤالات

۱) غ ۲) غ ۳) ص ۴) ص
۵) غ ۶) غ ۷) ص ۸) غ
۹) ص ۱۰) غ ۱۱) ج ۱۲) ب
۱۳) ج ۱۴) ب ۱۵) ب ۱۶) ج
۱۷) ب ۱۸) ج ۱۹) ب ۲۰) د

فصل چهاردهم

رگرسیون چندگانه و غیرخطی

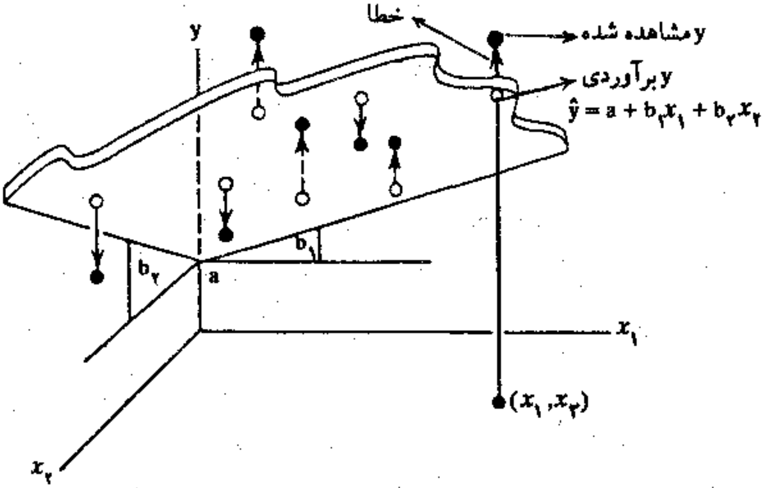
۱-۱۴ رگرسیون چندگانه

گاهی دو یا چند متغیر تأثیر عمده‌ای روی متغیر وابسته‌ای دارند. مثلاً شما ممکن است معتقد باشید که تعداد فروش هم به میزان تبلیغات و هم به تعداد فروشندگان بستگی دارد؛ یا میزان تولید شرکتی و بهره‌وری سازمانی با رضایت شغلی، حقوق و نحوهٔ پیشرفت شغلی ارتباط دارد؛ یا تولید ناخالص ملی (GNP) به تعداد جمعیت، سطح تکنولوژی و کیفیت نیروی انسانی بستگی دارد؛ و یا هزینهٔ تعمیر و نگهداری یک ماشین از میزان استفادهٔ جاری، نحوهٔ تعمیر و نگهداری، و سنوات استفاده از ماشین تبعیت می‌کند.

در فصل قبل، تنها تأثیر خطی یک متغیر مستقل (x) را روی متغیر وابسته (y) بررسی کردیم. برای بالابردن دقت برآورد خود، در این قسمت درصدد آنیم که روشی ارائه دهیم که بتوان تأثیر همزمان و خطی دو یا چند متغیر را روی متغیر وابسته‌ای اندازه گرفت. در این قسمت تنها رگرسیون دو متغیره بررسی می‌شود. در قسمت بعد (۲-۱۴) نحوهٔ استفاده از ستادهٔ کامپیوتر را برای رگرسیون یک متغیره، دو متغیره، و k متغیره خواهیم آموخت.

در رگرسیون خطی یک متغیره، معادلهٔ $y = \alpha + \beta x$ معرف خط رگرسیون جامعه بود که ما آن را به وسیلهٔ $\hat{y} = a + bx$ برآورد می‌کردیم. در رگرسیون خطی دو متغیره نیز معادلهٔ $y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ معرف صفحهٔ رگرسیون جامعه است (در فضای سه بعدی به جای خط صفحه داریم) که می‌خواهیم آن را به وسیلهٔ $\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$ برآورد کنیم. در اینجا x_1 و x_2 دو متغیر مستقل، $\hat{y}$ برآوردکننده y و a ، b_1 و b_2 به ترتیب برآوردکننده‌های α ، β_1 و β_2 هستند.

مـی‌توان بـرای تـصور بـهتر، صـفحهٔ رگـرسیون بـرآوردی را در شکـل ۱ـ۱٤ ملاحظه کرد. در این شکل که به فضای سه بعدی نظر دارد، صفحه رگرسیون جامعه به وسیلهٔ معادلهٔ $\hat{y} = a + b_1x_1 + b_2x_2$ برآورد شده و انحرافات مشاهدات از مقادیر برآوردی به وسیلهٔ فلش نشان داده شده است. a ارتفاع از مبدأ، b_1 شیب رگرسیون نسبت به محور x_1 و b_2 شیب رگرسیون نسبت به محور x_2 است.



شکل ۱ـ۱٤ صفحهٔ رگرسیون برآوردی

در رگرسیون دو متغیره نیز سعی می‌شود که مجموع توان دوم خطاها حداقل شود، یعنی عبارت:

$$\Sigma(y - \hat{y}) = \Sigma(y - a - b_1x_1 - b_2x_2)^2$$

می‌توان با گرفتن مشتقهای جزئی نسبت به a، b_1 و b_2 و برابر صفر قراردادن هریک از سه معادله، a، b_1 و b_2 را استخراج کرد.

در رگرسیون دو متغیره می‌توان با حل همزمان دستگاه معادلات زیر مقادیر a، b_1 و b_2 را پیدا کرد:

$$na + b_1\Sigma x_1 + b_2\Sigma x_2 = \Sigma y$$

$$a\Sigma x_1 + b_1\Sigma x_1^2 + b_2\Sigma x_1x_2 = \Sigma x_1 y$$

$$a\Sigma x_2 + b_1\Sigma x_1x_2 + b_2\Sigma x_2^2 = \Sigma x_2 y$$

مثال ۱-۱۴ فرض کنید محققی معتقد است که میزان پس‌انداز خانواده‌ها به میزان درآمد و تعداد فرزندان آنها بستگی دارد. در این رابطه اطلاعات زیر جمع‌آوری شده است:

خانواده	درآمد (برحسب ده هزار ریال)	تعداد فرزندان	پس‌انداز (برحسب ده هزار ریال)
۱	۳۸	۲	۱۱
۲	٤۰	۲	۹
۳	٦۰	۳	۱۰
٤	۳٦	٤	٤
٥	٥٥	۲	۱۷
٦	۷۲	۲	۳۰
۷	٤۰	۱	۱٥
۸	۳۰	۱	۱٤

الف) معادلهٔ رگرسیونی را برآورد کنید که بتوان با داشتن میزان درآمد و تعداد فرزندان، میزان پس‌انداز را پیش‌بینی کرد.

ب) b_1 و b_2 چقدر است و مفهوم هریک چیست؟

ج) اگر خانواده‌ای ٤٦۰ هزار ریال درآمد و ۳ فرزند داشته باشد، پس‌انداز آن را پیش‌بینی کنید.

الف)

x_1	x_2	y	x_1y	x_2y	x_1x_2	x_1^2	x_2^2
۳۸	۲	۱۱	٤۱۸	۲۲	۷٦	۱٤٤٤	٤
٤۰	۲	۹	۳٦۰	۱۸	۸۰	۱٦۰۰	٤
٦۰	۳	۱۰	٦۰۰	۳۰	۱۸۰	۳٦۰۰	۹
۳٦	٤	٤	۱٤٤	۱٦	۱٤٤	۱۲۹٦	۱٦
٥٥	۲	۱۷	۹۳٥	۳٤	۱۱۰	۳۰۲٥	٤
۷۲	۲	۳۰	۲۱٦۰	٦۰	۱٤٤	٥۱۸٤	٤
٤۰	۱	۱٥	٦۰۰	۱٥	٤۰	۱٦۰۰	۱
۳۰	۱	۱٤	٤۲۰	۱٤	۳۰	۹۰۰	۱
۳۷۱	۱۷	۱۱۰	٥٦۳۷	۲۰۹	۸۰٤	۱۸٦٤۹	٤۳

بنابراین:

$$\text{۸}a + \text{۳۷۱}b_1 + \text{۱۷}b_2 = \text{۱۱۰}$$

$$\text{۳۷۱}a + \text{۱۸۶۴۹}b_1 + \text{۸۰۴}b_2 = \text{۵۶۳۷}$$

$$\text{۱۷}a + \text{۸۰۴}b_1 + \text{۴۳}b_2 = \text{۲۰۹}$$

با حل همزمان این سه معادله، خواهیم داشت:

$$a=\text{۳/۹۳۶۵} \quad , \quad b_1 = \text{۰/۴۲۰۳} \quad , \quad b_2 = -\text{۴/۵۵۵۳}$$

بنابراین معادلهٔ رگرسیون برآوردی به این صورت خواهد داشت:

$$\hat{y} = \text{۳/۹۳۶۵} + \text{۰/۴۲۰۳}x_1 - \text{۴/۵۵۵۳}x_2$$

ب) مفهوم $b_1 = \text{۰/۴۲۰۳}$ این است که به فرض ثابت بودن تعداد فرزندان و بقیه شرایط با افزایش هر میزانی از درآمد تقریباً ۴۲ درصد آن پس‌انداز می‌شود، $b_2 = -\text{۴/۵۵۵۳}$ بدین معنی است که با فرض ثابت بودن درآمد و بقیه شرایط، هزینهٔ هر فرزند ۴/۵۵۵۳ برحسب ده هزار ریال و یا ۴۵۵۵۳ ریال خواهد بود.

ج)

$$\hat{y} = \text{۳/۹۳۶۵} + \text{۰/۴۲۰۳}(\text{۴۶}) - \text{۴/۵۵۵۳}(\text{۳})$$

$$= \text{۹/۶۰۴۴} \ (\text{بر حسب ده هزار ریال})$$

و یا ۹۶۰۴۴ ریال به طور متوسط پس‌انداز خواهد شد.

تمرین

۱. این داده‌ها را در نظر بگیرید:

x_1	۱۸	۲۰	۲۵	۱۴	۲۱	۱۹
x_2	۵۲	۴۳	۳۶	۴۹	۳۸	۴۲
y	۱۲۱	۱۰۰	۹۸	۱۰۵	۱۱۰	۱۱۵

الف) معادلهٔ رگرسیون را برآورد کنید.

ب) با فرض $x_1 = \text{۲۰}$ و $x_2 = \text{۴۰}$ مقدار y را برآورد کنید.

۲. شرکتی قصد دارد رفتار فروش خود را با توجه به هزینه تبلیغات و قیمت محصولش تعیین کند. این اطلاعات از سوابق فروش شرکت در دسترس است:

تعداد فروش (برحسب هزار واحد)	۳۵	٤۲	٦۰	٦۲	۵۲	٤۷	۵۰
هزینه تبلیغات (برحسب میلیون ریال)	۱۷	۲۱	۲۵	۱۸	۱۹	۱۵	۲۰
قیمت محصول (برحسب ریال)	۱۳۰	۱٤۰	۱۲۰	۱۱۵	۱۱۷	۱۲۰	۱۳۰

الف) معادلهٔ رگرسیون را برآورد کنید.
ب) به ازای هریک ریال کاهش در قیمت محصول، با فرض ثابت بودن بقیه شرایط، تعداد فروش چه تغییری می‌کند؟
ج) تعداد فروش را برای قیمت ۱۲۵ ریال و هزینه تبلیغات ۱۷ میلیون ریال پیش‌بینی کنید.
۳. این داده‌ها را در نظر بگیرید:

x_1	۸	۸	٦	۵	۳
x_2	۰	۱	۲	۳	٤
y	۲	۵	۷	۸	۵

الف) معادلهٔ رگرسیون را برآورد کنید.
ب) اگر $x_1 = ٤$ و $x_2 = ٤$ باشد y را برآورد کنید.

۲ـ۱٤ کامپیوتر و رگرسیون

قبلاً توضیح دادیم که چگونه می‌توان رگرسیون خطی را در صورتی که یک متغیره و یا دو متغیره باشد برآورد کرد. حجم محاسبات در رگرسیون دو متغیره، حتی اگر تعداد داده‌ها زیاد نباشد، زیاد بوده و کار پرزحمتی است. حال اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد و قرار باشد تمام محاسبات با دست انجام شود مطلوبیت رگرسیون بشدت افت پیدا می‌کند، بخصوص اگر بیش از دو متغیر مستقل وجود داشته باشد. معمولاً مسائل واقعی که مدیران با آن مواجهند، از طرفی با حجم زیادی از داده‌ها و از طرف دیگر با متغیرهای زیادی درگیرند.

خوشبختانه بسته نرم‌افزارهای مختلف کامپیوتری مانند MINITAB ، SPSS ، MYSTAT وجود دارند که براحتی می‌توان بسیاری از مسائل آماری را با آنها تحلیل کرد. ما در اینجا از بسته نرم‌افزار SPSS برای رگرسیون استفاده خواهیم کرد. این بسته نرم‌افزار قابلیت تحلیل رگرسیون خطی یک متغیره، دو متغیره و غیره را دارد.

مثال ۲ـ۱۴ داده‌های مثال ۱ـ۱۴ دوباره در اینجا تکرار می‌شود.

خانواده	درآمد (برحسب ده هزار ریال)	تعداد فرزندان	پس‌انداز (برحسب ده هزار ریال)
۱	۳۸	۲	۱۱
۲	٤۰	۲	۹
۳	٦۰	۳	۱۰
٤	۳٦	٤	٤
۵	۵۵	۲	۱۷
٦	۷۲	۲	۳۰
۷	٤۰	۱	۱۵
۸	۳۰	۱	۱٤

این بار، به جای محاسبات دستی، برای تحلیل رگرسیون از بسته نرم‌افزار SPSS استفاده شده است. ستادهٔ آن به این صورت است:

Multiple R		.90186			
R Square		.81334			
Adjusted R Square		.73868			
Standard Error		3.93841			
Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X1	.42035	.10495	.78359	4.005	.0103
X2	−4.55533	1.52087	−.58596	−2.995	.0303
(Constant)	3.93653	5.58000		.705	.5120

الف) ضریب همبستگی، ضریب تعیین و خطای معیار چقدر است؟ دربارهٔ هریک توضیح دهید.

ب) معادلهٔ رگرسیون را برآورد کنید.

الف) در رگرسیون چند گانه، به جای ضریب همبستگی معمولی، «ضریب همبستگی چندگانه»[1] داریم. این ضریب نشان می‌دهد که شدت رابطهٔ متغیرهای مستقل به طور کلی با متغیر وابسته به چه میزان است. این ضریب در این مثال تقریباً ۰/۹۰ است.

«ضریب تعیین»[2] معرف میزان تغییرپذیری (انحراف) در متغیر وابستهٔ (y) است که به وسیلهٔ رگرسیون توضیح داده می‌شود. این مقدار تقریباً ۰/۸۱ است.

سومین مقدار در ستادهٔ کامپیوتری «ضریب تعیین تعدیل شده»[3] است و فرمول آن با $\bar{r}^۲$ نشان داده می‌شود:

$$\bar{r}^۲ = ۱ - \frac{\Sigma(y-\hat{y})^۲/(n-۲)}{\Sigma(y-\bar{y})^۲/(n-۱)}$$

اگر فرمول $r^۲$ را به خاطر آورید ملاحظه خواهید کرد که تفاوت $r^۲$ و $\bar{r}^۲$ در عامل $(n-۱)/(n-۲)$ است. در واقع این عامل باعث می‌شود اریبی که در ضریب تعیین $r^۲$ ناشی از حجم نمونه (n) است برطرف شود. چنانچه n بزرگ شود مقدار $(n-۱)/(n-۲)$ به یک نزدیک شده و تفاوت $r^۲$ و $\bar{r}^۲$ به صفر می‌گراید.

«خطای معیار»[4] میزان پراکندگی داده‌ها را حول رگرسیون برآوردی نشان می‌دهد؛ محاسبهٔ آن برای رگرسیون چندگانه به این صورت است:

$$S_e = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\hat{y})^۲}{n-k-۱}}$$

که در آن y مقدار مشاهده شده، $\hat{y}$ مقدار برآوردی به وسیله رگرسیون، n تعداد مشاهدات و k تعداد متغیرهای مستقل است. این مقدار برای این مثال تقریباً برابر ۳/۹۳۸ است.

ب) برای به‌دست آوردن معادلهٔ رگرسیون کافی است مقدار زیر ستون B و متغیرهای متناظرشان در زیر ستون Variable را نگاه کنیم. مقادیر زیر ستون B ضریب هریک از متغیرها در معادلهٔ رگرسیون است؛ بنابراین معادلهٔ رگرسیون برآوردی به این صورت است:

$$\hat{y} = ۳/۹۳۶ + ۰/۴۲۰x_۱ - ۴/۵۵۵x_۲$$

---

1. Multiple R
2. R Square
3. Adjusted R Square
4. Standard Error

در مثال فوق، ستاده‌های SPSS اطلاعات دیگری نیز داشت که دربارهٔ آنها توضیح داده نشد. توضیح دربارهٔ آنها و نحوهٔ استفاده‌شان در قسمت ۳ـ۱۴ مطرح می‌شود.

تمرین

۱. این داده‌ها و ستادهٔ کامپیوتری SPSS مربوط به آنها در زیر آمده است:

x	۳	۵	۴	۷	۹	۶	۵	۴	۸
y	۱۱	۲۰	۱۶	۲۴	۲۶	۱۵	۲۱	۱۸	۲۷

Multiple R	.85938				
R Square	.73853				
Adjusted R Square	.70117				
Standard Error	2.91548				
Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X	2.29167	.51539	.85938	4.446	.0030
(Constant)	6.79167	3.07798		2.207	.0631

الف) معادلهٔ رگرسیون را برآورد کنید.

ب) اگر ۷ = xباشد، مقدار y را پیش‌بینی کنید.

۲. این داده‌ها به همراه ستادهٔ کامپیوتری SPSS مربوطه در زیر آمده است:

x_1	۸	۷	۵	۸	۷	۴	۵
x_2	۳۴	۴۰	۳۸	۲۳	۳۴	۴۵	۲۲
y	۴۵	۴۹	۵۲	۳۴	۳۹	۶۰	۳۰

Multiple R	.96122				
R Square	.92395				
Adjusted R Square	.88593				
Standard Error	3.56069				
Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X1	−.71025	.97094	−.10803	−.732	.5050
X2	1.13249	.18235	.91722	6.211	.0034
(Constant)	10.42613	10.18503		1.024	.3639

الف) چند درصد از تغییرات در y به وسیلهٔ رگرسیون، توضیح داده می‌شود؟
ب) معادلهٔ رگرسیون را برآورد کنید.
ج) مقدار y به ازای $x_1 = ۶$ ، $x_2 = ۳۵$ چقدر است؟

۳. داده‌های زیر به همراه ستادهٔ کامپیوتری SPSS مربوطه میزان فروش فولاد بر حسب میلیون تن (y) ، نرخ تورم برحسب درصد (x_1) ، قیمت خرید هر تن سنگ آهن بر حسب صد هزار ریال (x_2) و قیمت فروش هر تن فولاد برحسب میلیون ریال (x_3) را نشان می‌دهد.

x_1	۳/۹	۷/۵	۱۰/۷	۱۵/۵	۱۳/۰	۱۱/۰
x_2	۵/۰۰	۲/۲۰	۴/۵۰	۴/۳۵	۲/۶۰	۳/۰۵
x_3	۵/۱	۵/۷	۷/۱	۶/۵	۶/۱	۵/۹
y	۳/۱	۴/۰	۴/۷	۴/۳	۳/۷	۳/۵

Multiple R		.92808			
R Square		.86133			
Adjusted R Square		.65333			
Standard Error		.33806			
Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X1	−.03402	.05538	−.24250	−.614	.6016
X2	−.05824	.14166	−.11649	−.411	.7208
X3	.91759	.32831	1.09640	2.795	.1077
(Constant)	−1.12352	1.55695		−.722	.5455

الف) معادلهٔ رگرسیون را برآورد کنید.
ب) میزان فروش فولاد را به ازای نرخ تورم ۱۴ درصد، قیمت خرید هر تن سنگ ۳۶۰ هزار ریال و قیمت فروش هر تن فولاد ۷ میلیون ریال تعیین کنید.

۳ـ۱۴ استنباط در خصوص پارامترهای جامعه در رگرسیون چندگانه

پارامترهایی که در رگرسیون آنها را برآورد می‌کردیم براساس مشاهدات یک نمونه است. با تغییر نمونه این پارامترها نیز تغییر می‌یابند. فرض کنید در رگرسیون

چندگانه می‌خواهیم رگرسیون جامعه‌ای را که دارای k متغیر مستقل به این صورت است برآورد کنیم:

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k$$

رگرسیون برآوردی ما به صورت زیر است:

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k$$

که پارامترهای جامعهٔ α ، β_1، β_2، ... ، و β_k را با a ، b_1، b_2، ... ، و b_k برآورد کرده‌ایم. استنباط در خصوص α از اهمیت چندانی برخوردار نیست؛ بنابراین استنباط در خصوص پارامترهای جامعه را به استنباط درخصوص β_iها محدود می‌کنیم.

مجدداً در اینجا قسمتی از ستادهٔ SPSS برای مثال ۲ـ۱۴ ـ که مربوط به میزان درآمد، پس‌انداز و تعداد فرزندان یک نمونه ۸ تایی بود ـ آورده می‌شود.

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X1	.42035	.10495	.78359	4.005	.0103
X2	−4.55533	1.52087	−.58596	−2.995	.0303
(Constant)	3.93653	5.58000		.705	.5120

دربارهٔ ستون اول و دوم (سمت چپ) در قسمت ۲ـ۱۴ توضیح داده شد. اعداد ستونی که بالای آن SEB نوشته شده خطای معیار پارامترهای برآوردی را نشان می‌دهد، مثلاً ۰/۱۰۴۹۵ خطای معیار b_1، ۱/۵۲۰۸۷ خطای معیار b_2 و ۵/۵۸۰۰۰ خطای معیار a است؛ یعنی:

$$S_{b1} = ۱/۵۲۰۸۷ \ , \ S_{b2} = ۰/۱۰۴۹۵ \ , \ S_a = ۵/۵۸۰۰۰$$

با داشتن خطای معیار می‌توانیم هر نوع استنباطی را دربارهٔ β_iها داشته‌باشیم. توجه داشته باشید که آمارهٔ آزمون t با $n - k - ۱$ درجه آزادی است که در آن n تعداد نمونه و k تعداد متغیرهای مستقل است.

مثال ۳ـ۱۴ با توجه به ستادهٔ کامپیوتری برای مثال ۲ـ۱۴ که در صفحه قبل آورده شده است:

الف) فرض $\beta_1 = ۰$ را در مقابل $\beta_1 \neq ۰$ در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید.

ب) فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای β_2 تشکیل دهید.
الف)
۱. فرضها: $H_0: \beta_1 = 0$
$H_1: \beta_1 \neq 0$
۲. آماره آزمون:

$$t = \frac{b_1 - \beta_1}{S_{b1}} = \frac{0/42035 - 0}{0/10495} = 4/005$$

۳. مقادیر بحرانی: داریم $n = 8$ ، $k = 2$ ، و $\alpha = 0/05$. چون دو متغیر مستقل وجود دارد $k = 2$ است. پس:

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n-k-1} = t_{0/025, 5} = \pm 2/571$$

٤. تصمیم‌گیری: چون $t = 4/005$ بزرگتر از ۲/۵۷۱ است پس فرض صفر رد می‌شود.

ب) با توجه به $t_{0/025, 5} = 2/571$، داریم:

$$-4/555 - (2/571)(1/521) \leq \beta_2 \leq -4/555 + (2/571)(1/521)$$

و یا:

$$-8/465 \leq \beta_2 \leq -0/645$$

در اغلب موارد، در آزمون فرض برای β_iها، می‌خواهیم بدانیم آیا متغیری مانند x_i تأثیری در متغیر وابستهٔ y دارد یا خیر؟ اگر x_i تأثیری در y نداشته باشد در این صورت β_i مربوطه صفر است ($\beta_i = 0$) و می‌توان آن متغیر را از معادلهٔ رگرسیون حذف کرد؛ بنابراین اگر هدف ما آزمون فرض $\beta_i = 0$ در مقابل $\beta_i \neq 0$ باشد، در این صورت آمارهٔ آزمون به این ترتیب است:

$$t = \frac{\beta_i - 0}{S_{bi}} = \frac{\beta_i}{S_{bi}}$$

کافی است که مقدار t محاسبه شدهٔ فوق را با مقادیر ناحیهٔ بحرانی مقایسه کنیم.

مجدداً به ستادهٔ کامپیوتری برای مثال ۲ـ۱٤ نگاه کنید. در ستون دوم از راست (ستون T) مقادیر $\frac{\beta_i}{S_{bi}}$ محاسبه شده است؛ بنابراین دیگر نیازی به محاسبهٔ t نیست، فقط

کافی است برای آزمون $\beta_i = 0$ در مقابل $\beta_i \neq 0$ تنها مقدار متناظر را با مقادیر ناحیهٔ بحرانی مقایسه کنیم.

مثال ۱۴ـ۴ با توجه به ستادهٔ کامپیوتری برای مثال ۲ـ۱۴، که در صفحهٔ ۲۰۱ آورده شده است، آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان ادعا کرد که x_2 تأثیر معنی‌داری در y دارد؟

مقادیر بحرانی عبارتند از: $t_{0/025, 5} = \pm 2/571$. چون مقدار ۲/۹۹۵− در ناحیهٔ بحرانی قرار می‌گیرد نمی‌توان ادعا کرد که x_2 تأثیر معنی‌داری در y ندارد. به عبارت دیگر نمی‌توان ادعا کرد که $\beta_2 = 0$ است.

مجدداً ستادهٔ کامپیوتری را برای مثال ۲ـ۱۴ در اینجا می‌آوریم:

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X1	.42035	.10495	.78359	4.005	.0103
X2	−4.55533	1.52087	−.58596	−2.995	.0303
(Constant)	3.93653	5.58000		.705	.5120

ستون اول از سمت راست را ملاحظه کنید (ستونی که بالای آن Sig T قرار دارد). با وجود این ستون، کار ما در آزمون $\beta_i = 0$ در مقابل $\beta_i \neq 0$ خیلی ساده‌تر می‌شود و اصلاً نیازی به جدول پیوست t نداریم. اعداد زیر این ستون احتمال آن را نشان می‌دهد که هر β_i برابر صفر باشد. برای آزمون $\beta_i = 0$ در مقابل $\beta_i \neq 0$ کافی است تنها مقدار این احتمال را با سطح معنی‌دار α مقایسه کنیم، اگر این مقدار احتمال کوچکتر یا مساوی α باشد، فرض صفر $(\beta_i = 0)$ را رد می‌کنیم، در غیر این صورت فرض مقابل $(\beta_i \neq 0)$ رد می‌شود.

مثال ۱۴ـ۵ با توجه به ستادهٔ کامپیوتری صفحهٔ قبل، در سطح معنی‌دار ۵ درصد آیا فرض $\beta_1 = 0$ را می‌پذیرید؟

چون ۰/۰۱۰۳ کوچکتر از $\alpha = 0/05$ است، فرض $\beta_1 = 0$ رد شده و نتیجه می‌گیریم که متغیر x_1 متغیر مؤثری در y است.

تنها ستونی که دربارهٔ آن بحث نشد ستون سوم از سمت راست است. اعداد این ستون ضریبهای β یا ضریبهای استاندارد تفکیکی رگرسیون هستند.[1]

---

۱. نحوهٔ محاسبه و استفاده از این ضریبها را می‌توانید با مراجعه به این کتاب مطالعه کنید:

Kerlinger, Fred N. and Elazar J. Pedhazur; *Multiple Regression in Behavioral Research;* New York: Rinehart & winston, 1973.

تمرین

۱. داده‌هایی همراه با قسمتی از ستادهٔ SPSS به این صورت است:

x_1	۵	۴	۱۰	۳	۶	۵	۵	۳	۷	۷	۶	۱۰	۷
x_2	۲۵	۱۶	۱۰۰	۹	۳۶	۲۵	۲۵	۹	۴۹	۴۹	۳۶	۱۰۰	۴۹
y	۱۴	۱۲	۱۰	۶	۲۴	۲۰	۱۸	۱۰	۱۲	۲۲	۲۸	۸	۱۹

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X1	13.36417	3.06395	4.44209	4.362	.0014
X2	−1.01889	.23005	−4.51057	−4.429	.0013
(Constant)	−23.18689	9.42189		−2.461	.0336

بدون استفاده از اولین ستون سمت راست، در سطح معنی دار ۵ درصد آزمون کنید آیا می‌توان ادعا کرد که $\beta_1 = 0$ است؟

۲. با مراجعه به تمرین ۱ فقط از دو ستون سمت راست استفاده کرده و فرض $\beta_2 = 0$ را در مقابل $\beta_2 \neq 0$ آزمون کنید.

۳. با مراجعه به تمرین ۱ برای آزمون $\beta_1 = 0$ در مقابل $\beta_1 \neq 0$، سطح معنی‌دار α چقدر می‌تواند کاهش یابد، در صورتی که فرض $\beta_1 \neq 0$ رد نشود؟

۱۴ـ۴ آزمون خطی بودن

تا این قسمت با استفاده از نمودار پراکنش به خطی بودن رابطهٔ بین دو متغیر پی‌بردیم و با فرض اینکه رابطهٔ بین دو یا چند متغیر خطی است به برآورد پارامترها و تعیین معادلهٔ رگرسیون پرداختیم و سپس با محاسبهٔ ضریب تعیین r^2 میزان موفقیت رگرسیون را اندازه گرفتیم.

در این قسمت تا آنجا که امکانپذیر باشد به سراغ رگرسیون خطی می‌رویم چون اول آنکه ساده‌تر است، دوم آنکه شیوه‌های آماری متناسب با آن به صورت آماده وجود دارد و سوم آنکه بعضی از روابط غیرخطی را می‌توان با کمی دستکاری خطی کرد. حال می‌خواهیم آزمونی را مطرح کنیم که به وسیلهٔ آن می‌توان در خصوص «خطی بودن» یک سری مشاهدات قضاوت کرد. فرض کنید k مقدار متمایز x از مشاهدات تصادفی

n تایی مانند $x_{(1)}$، $x_{(2)}$، ... ، $x_{(k)}$ در اختیار داریم، به طوری که نمونهٔ n تایی مورد نظر شامل n_1 مشاهده از y_1 متناظر با $x_{(1)}$؛ n_2 مشاهده از y_2 متناظر با $x_{(2)}$، ... ؛ و n_k مشاهده از y_k متناظر با $x_{(k)}$ باشد. در اینجا $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ است.

اگر y_{ij} را j امین مقدار از y_i و $y_{i.}$ را مجموع مقادیر y_i در این نمونه تعریف کنیم آمارهٔ

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{k-2}}{\frac{\chi_2^2}{n-k}}$$

که در آن:

$$\chi_1^2 = \Sigma \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{\Sigma y^2}{n} - \frac{(\Sigma x y - n\bar{x}\bar{y})^2}{\Sigma x^2 - \frac{1}{n}(\Sigma x)^2}$$

و:

$$\chi_2^2 = \Sigma y^2 - \Sigma \frac{y_{i.}^2}{n_i}$$

است دارای توزیع F با k−۲ و n−k درجه آزادی است. اگر فرضیهٔ H_0 را خطی بودن رگرسیون در نظر بگیریم، در این صورت وقتی که H_0 درست باشد، برآوردکننده‌های $\chi_1^2/(k-2)$ و $\chi_2^2/(n-k)$ برآوردکننده‌های مستقل از هم برای σ^2 هستند، ولی وقتی H_0 درست نباشد، برآوردکنندهٔ $\chi_1^2/(k-2)$ مقدار σ^2 را برآورد نمی‌کند؛ بنابراین اگر F محاسبه شده در سطح معنی‌دار α بیشتر از F جدول با k−۲ و n−k درجهٔ آزادی به ترتیب برای صورت و مخرج باشد فرض صفر را رد می‌کنیم در غیر این صورت می‌پذیریم که رابطه خطی است.

مثال ۶-۱۴ داده‌های زیر را در نظر بگیرید:

x	۴	۴	۱۰	۳	۶	۵	۵	۳	۷	۷	۸	۱۰	۸
y	۱۸	۱۲	۱۰	۶	۲۴	۲۰	۱۸	۱۰	۲۰	۲۲	۲۰	۸	۱۷

در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید که فرض خطی بودن رابطهٔ x و y قابل قبول است یا نه؟

۱. فرضها: رگرسیون خطی است : H_0

رگرسیون غیرخطی است : H_1

۲. آماره آزمون: با توجه به داده‌ها داریم $\Sigma x = ۸۰$ ، $\Sigma x^۲ = ۵۶۲$ ، $\Sigma xy = ۱۲۷۲$ ، $\Sigma y = ۲۰۵$ ، $\Sigma y^۲ = ۳۶۴۱$ ، $\bar{x} = ۶/۱۵$ ، $\bar{y} = ۱۵/۷۷$ و $n = ۱۳$.

$$x_{(۱)} = ۳ \qquad n_۱ = ۲ \qquad y_{۱.} = ۶+۱۰ = ۱۶$$
$$x_{(۲)} = ۴ \qquad n_۲ = ۲ \qquad y_{۲.} = ۱۸+۱۲ = ۳۰$$
$$x_{(۳)} = ۵ \qquad n_۳ = ۲ \qquad y_{۳.} = ۲۰+۱۸ = ۳۸$$
$$x_{(۴)} = ۶ \qquad n_۴ = ۱ \qquad y_{۴.} = ۲۴$$
$$x_{(۵)} = ۷ \qquad n_۵ = ۲ \qquad y_{۵.} = ۲۰+۲۲ = ۴۲$$
$$x_{(۶)} = ۸ \qquad n_۶ = ۲ \qquad y_{۶.} = ۲۰+۱۷ = ۳۷$$
$$x_{(۷)} = ۱۰ \qquad n_۷ = ۲ \qquad y_{۷.} = ۱۰+۸ = ۱۸$$

پس:

$$\chi_۱^۲ = \left(\frac{۱۶^۲}{۲}+\frac{۳۰^۲}{۲}+\frac{۳۸^۲}{۲}+\frac{۲۴^۲}{۱}+\frac{۴۲^۲}{۲}+\frac{۳۷^۲}{۲}+\frac{۱۸^۲}{۲}\right)-\frac{۲۰۵^۲}{۱۳}-\frac{[۱۲۷۲-۱۳(۶/۱۵)(۱۵/۷۷)]^۲}{۵۶۲-\frac{۱}{۱۳}(۸۰)^۲}$$

$$= ۳۶۰۴/۵۰ - ۳۲۳۲/۶۹ - ۱/۷۹$$

$$= ۳۷۰/۰۲$$

$$\chi_۲^۲ = ۳۶۴۱ - ۳۶۰۴/۵۰$$

$$= ۳۶/۵۰$$

پس:

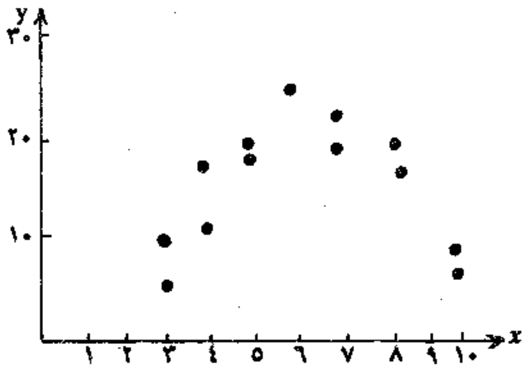
$$F = \frac{(۳۷۰/۰۲)/(۷-۲)}{(۳۶/۵۰)/(۱۳-۷)} = ۱۲/۱۶$$

۳. مقادیر بحرانی: داریم $n = ۱۳$ ، $\alpha = ۰/۰۵$. چون ۷ مقدار متمایز x وجود دارد (۳,۴,۵,۶,۷,۸,۱۰) بنابراین $k = ۷$ است، پس:

$$F_{\alpha, k-۲, n-k} = F_{۰/۰۵, ۵, ۶} = ۴/۳۹$$

۴. تصمیم‌گیری: چون $F = ۱۲/۱۶$ بیشتر از ۴/۳۹ است فرض صفر را رد کرده، نتیجه می‌گیریم که فرض خطی بودن رگرسیون منتفی است.

اگر نمودار پراکنش داده‌های مثال ۶ـ۱۴ را رسم کنیم به غیرخطی بودن آن پی می‌بریم. نمودار پراکنش آن در شکل ۲ـ۱۴ رسم شده است. نمودار فوق به یک منحنی سهمی شبیه است تا به یک خط. آزمون خطی بودن ابزار دقیقتری نسبت به نمودار پراکنش است. آزمون خطی بودن می‌تواند بگوید‌که آیا برای مشاهداتی خاص می‌توان از رگرسیون خطی استفاده کرد یا نه. نمودار پراکنش گرچه دقت آزمون را ندارد، ولی در اکثر مواقع می‌توان با نگاه کردن به آن، در صورتی که خطی نباشد، «نوع مدل غیرخطی مناسب آن را حدس زد».



شکل ۲ـ۱۴ نمودار پراکنش برای داده‌های مثال ۶ـ۱۴

تمرین

۱. خطی بودن داده‌های زیر را در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید.

x	۱۵	۱۷	۱۶	۲۰	۲۲	۱۷	۱۵	۱۵	۲۰
y	۳۰	۴۱	۳۴	۶۰	۷۸	۴۴	۲۸	۳۱	۶۲

۲. در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید آیا برآورد خط رگرسیونی برای داده‌های زیر قابل توجیه است:

x	۷	۱	۲	۶	۴	۵	۶	۷	۸	۵
y	۹/۱	۷/۳	۳/۲	۴/۶	۴/۸	۲/۹	۵/۷	۷/۱	۸/۸	۱۰/۲

۳. میانگین تولید ماهانهٔ هر نفر (در گروههای سنی مختلف) در کارگاهی به این صورت بوده است:

گروه	دامنهٔ سنی	میانگین تولید ماهانهٔ هر نفر
۱	۲۰_۲۲	۱۱۲
۲	۲۳_۲۵	۱۱۸
۳	۲۶_۲۸	۱۱۵
٤	۲۹_۳۱	۱۲۷
٥	۳۲_۳٤	۱۳۰
٦	۳٥_۳۷	۱۲٤
۷	۳۸_٤۰	۱۲۰
۸	٤۱_٤۳	۱۰٦
۹	٤٤_٤٦	۱۰۲
۱۰	٤۷_٥۰	۹۹

با استفاده از آزمون خطی بودن در سطح معنی‌دار ٥ درصد ادعای خطی نبودن رابطهٔ بین سن و تولید افراد را آزمون کنید (از میانگین سن گروهها استفاده کنید).

١٤_٥ رگرسیون نمایی و سهمی

اگر مشخص شود که توزیع مشاهدات غیرخطی است، می‌توان با رسم نمودار پراکنش (در صورت یک متغیره بودن) شکل غیرخطیِ مناسب آن را حدس زد. دو شکل غیر خطیِ نسبتاً ساده، نمایی و سهمی هستند. در اینجا قصد داریم رگرسیون نمایی و سهمی را برآورد کنیم.

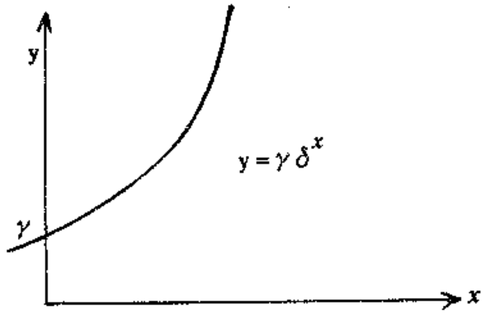
١٤_٥_١ رگرسیون نمایی

معادلهٔ «تابع نمایی» به این صورت است:

$$y = \gamma \delta^{x}$$

که γ (گاما) و δ (دلتا) دو پارامتر تابع هستند که با داشتن آن کل تابع را خواهیم داشت.

در شکل ۳ـ۱۴ شکل کلی تابع نمایی آمده است.



شکل ۳ـ۱۴ شکل تابع نمایی

اگر c و d به ترتیب برآوردکننده‌های γ و δ باشند، در این صورت معادلهٔ رگرسیون نمایی به این صورت خواهد بود:

$$\hat{y} = c\,d^{x}$$

هدف ما تعیین c و d است . با گرفتن لگاریتم از طرفین معادلهٔ فوق خواهیم داشت:

$$\log \hat{y} = \log c\,d^{x}$$
$$= \log c + x \log d$$

بنابراین:

$$\log \hat{y} = \log c + (\log d)\,x$$

اگر $a = \log c$ و $b = \log d$ باشد خواهیم داشت:

$$\log \hat{y} = a + b x$$

رابطهٔ فوق خطی بوده و می‌توان با استفاده از نقاط $(x_i, \log y_i)$ مقادیر a و b را با استفاده از فرمولهای ارائه شده در قسمت ۳ـ۱۳ محاسبه کرد.

مثال ۷ـ۱۴ این داده‌ها تعداد سفارشهای رسیده به یک کارگاه قالب‌ریزی برای

قالب‌ریزی قسمتی از موتور پمپ خاصی در طی سالهای مختلف است:

x (سال)	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸
y (تعداد سفارش)	۳۰	۳٤	۳۹	٤٦	٥٥	٦۷	۸۸	۱۲۰

بعد از رسم نمودار پراکنش مشخص شده که تابع تعداد سفارشات رسیده تقریباً نمایی است. منحنی $y = \gamma \delta^{x}$ را برآورد کرده، تعداد سفارشات را در چهار سال آینده پیش‌بینی کنید.

الف)

x	y	log y	x^2	x (log y)
۱	۳۰	۱/٤۷۷	۱	۱/٤۷۷
۲	۳٤	۱/٥۳۱	٤	۳/۰٦۲
۳	۳۹	۱/٥۹۱	۹	٤/۷۷۳
٤	٤٦	۱/٦٦۳	۱٦	٦/٦٥۲
٥	٥٥	۱/۷٤۰	۲٥	۸/۷۰۰
٦	٦۷	۱/۸۲٦	۳٦	۱۰/۹٥٦
۷	۸۸	۱/۹٤٤	٤۹	۱۳/٦۰۸
۸	۱۲۰	۲/۰۷۹	٦٤	۱٦/٦۳۲
۳٦	–	۱۳/۸٥۱	۲۰٤	٦٥/۸٦۰

بنابراین $\bar{x} = ٤/٥$ و $\overline{\log y} = ۱/۷۳۱$؛ پس:

$$b = \frac{٦٥/۸٦۰ - ۸(٤/٥)(۱/۷۳۱)}{۲۰٤ - ۸(٤/٥)^{۲}} = ۰/۰۸٤$$

$$a = ۱/۷۳۱ - ۰/۰۸٤\,(٤/٥) = ۱/۳٥۳$$

از این رو:

$$c = ۱۰^{۱/۳٥۳} = ۲۲/٥٤$$

$$d = ۱۰^{۰/۰۸٤} = ۱/۲۱۳$$

بنابراین معادلهٔ رگرسیون نمایی برآوردی به این صورت خواهد بود:

$$\hat{y} = ۲۲/۵۴\,(۱/۲۱۳)^{x}$$

تعداد سفارشهای برآوردی در چهار سال آینده (سال ۱۲) برابر است با:

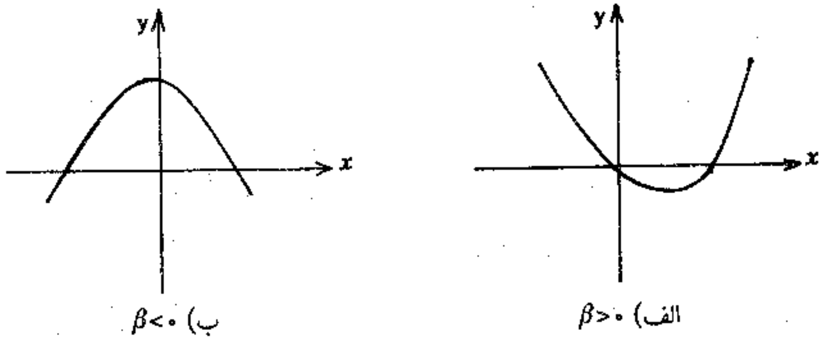
$$\hat{y} = ۲۲/۵۴\,(۱/۲۱۳)^{12}$$
$$= ۲۲۸/۷۱$$

۱۴ـ۵ـ۲ رگرسیون سهمی

معادلهٔ سهمی را می‌توان به صورت زیر نوشت که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است:

$$y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \qquad , \qquad \beta_2 \neq 0$$

شکل تابع، بسته به مثبت و یا منفی بودن β_2 می‌تواند به یکی از دو صورت $\cup$ یا $\cap$ باشد. شکل کلی سهمی در شکل ۴ـ۱۴ رسم شده است.



شکل ۴ـ۱۴ شکل کلی نمودار سهمی

اگر در معادلهٔ سهمی ($y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 x^2$) مقدار x_1 و x_2 را به صورت $x_1 = x$ و $x_2 = x^2$ تعریف کنیم، در این صورت معادلهٔ سهمی به این صورت خواهد بود:

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

که مشابه با شکل کلی معادلهٔ خطی دو متغیره است. با این تبدیل می‌توان با استفاده از رگرسیون چندگانه ـ که در قسمت ١ـ١٤ مطرح شد ـ مشاهداتی را که سهمی به نظر می‌رسند با استفاده از رگرسیون دو متغیره برآورد کرد.

مثال ٨ـ١٤ داده‌های مثال ٦ـ١٤ را در نظر بگیرید. با نمودار پراکنشی که در شکل ٢ـ١٤ رسم کردیم مشخص شد که تابع آنها تقریباً سهمی است. معادلهٔ رگرسیون سهمی را برای آن برآورد کنید.

در جدول زیر $x_1 = x$ و $x_2 = x^2$ تعریف شده است.

x_1	x_2	y	$x_1 y$	$x_2 y$	$x_1 x_2$	x_1^2	x_2^2
٤	١٦	١٨	٧٢	٢٨٨	٦٤	١٦	٢٥٦
٤	١٦	١٢	٤٨	١٩٢	٦٤	١٦	٢٥٦
١٠	١٠٠	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠	١٠٠٠٠
٣	٩	٦	١٨	٥٤	٢٧	٩	٨١
٦	٣٦	٢٤	١٤٤	٨٦٤	٢١٦	٣٦	١٢٩٦
٥	٢٥	٢٠	١٠٠	٥٠٠	١٢٥	٢٥	٦٢٥
٥	٢٥	١٨	٩٠	٤٥٠	١٢٥	٢٥	٦٢٥
٣	٩	١٠	٣٠	٩٠	٢٧	٩	٨١
٧	٤٩	٢٠	١٤٠	٩٨٠	٣٤٣	٤٩	٢٤٠١
٧	٤٩	٢٢	١٥٤	١٠٧٨	٣٤٣	٤٩	٢٤٠١
٨	٦٤	٢٠	١٦٠	١٢٨٠	٥١٢	٦٤	٤٠٩٦
١٠	١٠٠	٨	٨٠	٨٠٠	١٠٠٠	١٠٠	١٠٠٠٠
٨	٦٤	١٧	١٣٦	١٠٨٨	٥١٢	٦٤	٤٠٩٦
٨٠	٥٦٢	٢٠٥	١٢٧٢	٨٦٦٤	٤٣٥٨	٥٦٢	٣٦٢١٤

حال دستگاه معادلات را برای محاسبهٔ a، b_1 و b_2 تشکیل می‌دهیم:

$$١٣a + ٨٠b_1 + ٥٦٢b_2 = ٢٠٥$$

$$٨٠a + ٥٦٢b_1 + ٤٣٥٨b_2 = ١٢٧٢$$

$$٥٦٢a + ٤٣٥٨b_1 + ٣٦٢١٤b_2 = ٨٦٦٤$$

با حل همزمان سه معادلهٔ فوق a، b_1 و b_2 به این صورت خواهد بود:

$$a = -۲۴/۳۶۸ \quad , \quad b_۱ = ۱۴/۱۳۲ \quad , \quad b_۲ = -۱/۰۸۳$$

بنابراین معادلهٔ رگرسیون سهمی برآوردی مربوطه به این ترتیب است:

$$\hat{y} = -۲۴/۳۶۸ + ۱۴/۱۳۲x - ۱/۰۸۳x^۲$$

توجه کنید که در معادلهٔ فوق به جای $x_۱$ و $x_۲$ به ترتیب مقادیر آن، یعنی x و $x^۲$، گذاشته شده است.

مثال ۹ـ۱۴ معادلهٔ رگرسیون سهمی برآوردی مثال ۸-۱۴ را در نظر بگیرید. به ازای $x = ۷/۵$ مقدار y را برآورد کنید.

$$\hat{y} = -۲۴/۳۶۸ + ۱۴/۱۳۲\,(۷/۵) - ۱/۰۸۳\,(۷/۵)^۲$$

$$= ۲۰/۷۰۳$$

تمرین

۱. داده‌های زیر را در نظر بگیرید:

x	۲	۵	۳	۴	۵	۶	۵	۲	۷	-۵
y	۸	۲۴۸	۳۰	۷۶	۲۴۰	۷۵۰	۲۳۰	۱۲	۲۲۰۰	۰

الف) نمودار پراکنش داده‌های فوق را رسم کنید.

ب) بعد از رسم نمودار پراکنش، حتماً حدس زده‌اید که منحنی نمایی برای داده‌های فوق مناسب است. معادلهٔ رگرسیون نمایی را برای داده‌های فوق برآورد کنید.

۲. این داده‌ها را در نظر بگیرید:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	-۲	-۴	۲	۳	۴
y	۸	۲	-۴	-۴	۴	۹	۴۱	۶	۱۸	۳۸

الف) نمودار پراکنش داده‌های فوق را رسم کنید.

ب) منحنی رگرسیون سهمی را برای داده‌های فوق برآورد کنید.

ج) اگر $x = -۳$ باشد برآورد شما از y چقدر است؟

۳. به داده‌های تمرین ۳ (صفحه ۲۱۲) که میانگین تولید ماهانهٔ هر نفر (در گروههای سنی مختلف) در کارگاهی را نشان می‌دهد مراجعه کنید.

الف) نمودار پراکنش را برای آن رسم کنید (در محور افقی، xها، از میانگین دامنهٔ سنی استفاده کنید).

ب) معادلهٔ رگرسیون مناسبی برای داده‌های فوق برآورد کنید.

۶ـ۱۴ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. در رگرسیون دو متغیره، به کار بردن واژهٔ «خط رگرسیون» صحیح است. ص ☐ غ ☐

۲. برای آزمون فرض $\beta_1 = 0$ در مقابل $\beta_1 \neq 0$ با استفاده از ستادهٔ کامپیوتری SPSS در سطح معنی‌دار α، تنها نیاز به اطلاعات اولین ستون سمت راست داریم. ص ☐ غ ☐

۳. یکی از دلایل کاربرد فراوان رگرسیون خطی آن است که شیوه‌های آماری متناسب با آن به صورت آماره وجود دارد. ص ☐ غ ☐

۴. در آزمون خطی بودن، اگر تعداد مشاهدات ۱۵ تا بوده و ۵ مقدار متمایز وجود داشته باشد، آنگاه مقدار بحرانی در سطح معنی‌دار ۵ درصد با $F_{0/05, 7, 8} = ?$ برابر است. ص ☐ غ ☐

۵. نمودار پراکنش ابزار دقیقتری نسبت به آزمون خطی‌بودن است. ص ☐ غ ☐

۶. امتیاز نمودار پراکنش نسبت به آزمون خطی بودن آن است که در صورت غیرخطی بودن داده‌ها، می‌توان نوع مدل غیرخطی مناسب با آن را حدس زد. ص ☐ غ ☐

۷. می‌توان با گرفتن لگاریتم از طرفین معادلهٔ تابع نمایی، آن را به رابطهٔ خطی تبدیل کرد. ص ☐ غ ☐

۸. شکل منحنی سهمی بسته به مثبت و یا منفی بودن β_2 می‌تواند به صورت $\cup$ یا $\cap$ باشد. ص ☐ غ ☐

۹. اگر در معادلهٔ سهمی $\beta_2 < 0$ باشد شکل سهمی به صورت $\cup$ خواهد بود. ص ☐ غ ☐

۱۰. می‌توان با تعریف x_1 و x_2 به صورت $x_1 = x$ و $x_2 = x^2$ معادلهٔ سهمی را به معادلهٔ خطی دو متغیره تبدیل کرد. ص ☐ غ ☐

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. در معادلهٔ $y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$، متغیر y مستقل از x_2 است اگر کدام یک از این موارد وجود داشته باشد؟

الف) $\beta_2 = -1$ ب) $\beta_2 = 1$

ج) $\beta_2 = 0$ د) $\beta_2 < 0$

۱۲. برای مشاهداتی، معادلهٔ رگرسیون خطی برآوردی به صورت $\hat{y} = 10/25 + 0/70x_1 - 18/03x_2$ بوده است. آیا فرض $\beta_1 = 0$ را در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌پذیرید؟ چرا؟

الف) بلی، چون ۰/۷۰ مقدار کوچکی است.

ب) خیر، چون ۰/۷۰ مقدار کوچکی نیست.

ج) برای پاسخ نیاز به n و k داریم.

د) جواب به خطای معیار b_1 و تعداد مشاهدات بستگی دارد.

۱۳. کدام یک از این معادلات نمی‌تواند معادلهٔ سهمی باشد؟

الف) $y = ۱۰x - ۸x^۲$ ب) $y = -۵ + x^۲$

ج) $y = -۵ + ۱۰x$ د) $y = ۱۰x - ۸x^۲$

۱۴. برای برآورد کدام یک از این معادلات رگرسیون به استفاده از رگرسیون دو متغیره نیاز بوده است؟

الف) $\hat{y} = -۵(۱/۲۵)^{x}$ ب) $\hat{y} = -۵ + ۱/۲۵x - x^۲$

ج) الف و ب د) هیچ کدام

۱۵. در سطح معنی‌دار ۰/۱۰ برای آزمون خطی بودن ۱۲ مشاهده با ۵ مقدار متمایز، مقدار بحرانی آزمون با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) $F_{۰/۰۵,۴,۶} = ?$ ب) $F_{۰/۰۵,۴,۸} = ?$

ج) $F_{۰/۱۰,۵,۴} = ?$ د) $F_{۰/۱۰,۳,۷} = ?$

۱۶. در آزمون خطی بودن برای مسأله‌ای خاص $n = ۱۴$، $k = ۷$، $\chi_۱^۲ = ۳۵/۱۲$ ، $\chi_۲^۲ = ۸/۰۵$ است. مقدار F محاسبه شده با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) ۴/۳۶ ب) ۸/۷۲

ج) ۶/۱۱ د) هیچ کدام

مسائل

۱۷. داده‌های زیر را در نظر بگیرید:

$x_۱$	۱۷	۱۵	۱۰	۸	۱۱	۷	۱۴	۱۲
$x_۲$	۹	۸	۱۳	۱۲	۴	۱۰	۱۵	۷
y	۳۴	۳۵	۴۰	۳۰	۱۵	۳۰	۴۸	۲۵

الف) معادلهٔ رگرسیون خطی را برای داده‌های فوق برآورد کنید.

ب) $b_۲$ چقدر است و مفهوم آن چیست؟

ج) با فرض $x_۱ = ۱۰$ و $x_۲ = ۱۴$، y را برآورد کنید.

۱۸. این داده‌ها را در نظر بگیرید:

x	−۳	−۴	−۲	۵	۱۰	−۶	۴	۵	۴	۷
y	۴۰	۶۸	۲۲	۸	۱۱۵	۱۲۰	۰	۷	۳	۴۰

الف) معادلهٔ سهمی مناسبی برای آنها برآورد کنید.

ب) به ازای $x=8$ پیش‌بینی شما برای y چقدر است؟

۱۹. فرض خطی بودن معادلهٔ رگرسیون برآوردی را برای داده‌های زیر در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید.

x	٤	٢	٣	−١	٠	٥	٢	٣	−١	٠	٣
y	١٨٧٠	١٠٠	٣٦٠	١	٢	٩٨٠٠	٦٠	٣٨٢	٠	٣	٣٩٢

۲۰. نمودار پراکنش را برای داده‌های مسأله ۱۹ رسم کنید. در صورتی که نمودار پراکنش به منحنی نمایی شبیه است، معادلهٔ رگرسیون نمایی را برای آن برآورد کنید.

۲۱. بانکی می‌خواهد حسابهای جاری مشتریان خود را که چک می‌کشند به دو دسته تقسیم کند و در دو دفتر جداگانه ثبت کند؛ دسته اول گروهی که تعداد چکهایشان در ماه بیش از ۳۰ فقره و دستهٔ دوم گروهی که تعداد چکهای صادرهٔ آنها در ماه کمتر از ۳۰ فقره است. مشکلی در تقسیم‌بندی مشتریان قدیمی نیست. با توجه به اطلاعات گذشته در مورد درآمد و سن افراد، بانک سعی دارد مشتریان جدید خود را دسته‌بندی کند. در جدول زیر سن آنها برحسب نزدیکترین سال و درآمدشان برحسب میلیون ریال آمده است:

تعداد چکها	٢٩	٤٢	٩	٥٦	٢	١٠	٤٨	٤	١٥
سن (سال)	٣٧	٣٤	٤٨	٣٨	٤٣	٢٥	٣٣	٤٥	٣٠
درآمد (میلیون تومان)	٢٦	٢٥	٢٥	١٢	٢٥	٨	١٨	٢٥	٨

الف) معادلهٔ رگرسیون را برآورد کنید.

ب) مشتری جدید متقاضی افتتاح حساب جاری است. اگر سن او ۲۸ سال و درآمدش ۲۰ میلیون ریال باشد بانک باید او را در کدام دسته از مشتریان خود قرار دهد؟

پاسخنامهٔ سؤالات

۱) غ	۲) ص	۳) ص	٤) غ
۵) غ	٦) ص	۷) ص	۸) ص
۹) غ	۱۰) ص	۱۱) ج	۱۲) د
۱۳) ج	١٤) ب	۱۵) د	۱٦) ج

فصل پانزدهم

کاربردهای آزمون کای ـ مربع در مدیریت

۱ـ۱۵ مقدمه

در فصول مربوط به تخمین و آزمون فرض آماری در تعیین فاصله اطمینان برای واریانس و نیز آزمون فرضیه دربارهٔ آن از توزیع کای ـ مربع به اختصار یاد کردیم. همچنین در بخش ۱۸ـ۱۱ رابطهٔ توزیع کای ـ مربع با سایر توزیعها و خواص آن بحث و بررسی شد. توزیع کای ـ مربع به صورت فرمول ریاضی زیر نوشته می‌شود:

$$f(u)=\frac{1}{(\frac{k}{2}-1)!}\cdot\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}u^{(\frac{k}{2})-1}\cdot e^{-\frac{u}{2}},u>0 \qquad (۱۵ـ۱)$$

که در آن e عدد ثابت ۲/۷۱۸۲۸۰۰۰ و k تعداد درجهٔ آزادی است. متغیر u را معمولاً با حرف یونانی کای (χ) با توان ۲ نمایش می‌دهند؛ بنابراین آن را توزیع χ^2 خوانند. میانگین و واریانس توزیع کای ـ مربع به ترتیب عبارتند از: k و 2k . اشکال توزیع کای ـ مربع برای چندین مقدار مختلف k در شکل ۶ـ۱۰ نشان داده شده‌اند. در این شکل مشاهده می‌شود که اشکال توزیع χ^2 برای $k=1$ و $k=2$ کاملاً از شکل کلی آن برای $k>2$ متفاوت است. همچنین ملاحظه خواهیم کرد که χ^2 مقادیری بین صفر و بی‌نهایت را می‌تواند به خود بگیرد. چون χ^2 از مجموع مقادیر مجذور شده تشکیل شده است هرگز نمی‌تواند مقادیر منفی را به خود اختصاص دهد.

توزیع کای ـ مربع علاوه بر تخمین و آزمون آماری واریانس، کاربردهای بسیار زیادی دارد. از توزیع کای ـ مربع در آزمون فرضیه‌هایی که داده‌های مورد تجزیه و تحلیل به صورت فراوانی ارائه شده‌اند می‌توان استفاده کرد. دربارهٔ شیوه‌های آزمون فرضیه‌های مزبور تحت عناوین «آزمون استقلال[1] ،

1. independence test

آزمون همگونی[1] و آزمون نیکویی برازش[2]» در این فصل بتفصیل بحث خواهد شد. در این فصل خواهیم دید که همهٔ آزمونهای کای ـ مربع مورد استفاده را می‌توان به نحوی به صورت آزمونهای برازش درنظر گرفت. به گونه‌ای که برازش فراوانیهای مشاهده شده را به فراوانیهای مورد انتظار در صورتی که داده‌ها تحت نظریه معین یا فرضیه‌ای تولید شده باشند، آزمون می‌کنند. در عین حال عبارت «برازش» را برای استفاده از مفهوم محدودتری به کار می‌بریم.

۱۵ـ۲ آزمون استقلال

متداولترین استفاده از توزیع کای ـ مربع آزمون فرضیه، وجود استقلال بین دو معیار رده‌بندی داده‌هاست، در صورتی که معیارهای مزبور به همان مجموعه اعمال شود. چنانچه توزیع یکی از معیارهای رده‌بندی بدون توجه به توزیع معیار دیگر رخ دهد، می‌گوییم که دو معیار رده‌بندی از هم مستقل هستند؛ برای مثال چنانچه سطح عملکرد و میزان رضایت کارمندان سازمان از هم مستقل باشد، انتظار ما این است که توزیع عملکرد بدون توجه به توزیع رضایت شغلی کارمندان اتفاق افتد. به عبارت دیگر در جدول توأم آنها می‌توان شرط استقلال را به صورت رابطهٔ ۲ـ۱۵ دید:

$$f(x,y) = f(x) \times f(y) \qquad (۱۵\text{ـ}۲)$$

به عبارت دیگر اگر $f(x,y)$ را احتمال توأم x و y بدانیم و احتمال اشتراک دو حادثهٔ خاص x و y مساوی احتمال حاصلضرب آنها باشد، آن دو حادثه و در حالت عمومی‌تر آن دو متغیر x و y مستقل هستند؛ بنابراین می‌توان گفت: «آزمون استقلال کای ـ مربع برای بررسی فرضیهٔ استقلال دو متغیر که دست کم یکی از آنها کیفی است استفاده می‌شود. در این آزمون فراوانیهای مشاهده شده با فراوانیهای مورد انتظار استقلال دو متغیر مقایسه می‌شوند».

داده‌های جمع‌آوری شده برای متغیرها در یک جدول که شامل r سطر و c ستون است خلاصه می‌شوند. به طور کلی چنین جدولی را «جدول توافقی»[3] گویند. طریقه

1. homogeneity test   2. goodness of fit test   3. contingency table

طبقه‌بندی داده بر طبق دو معیار (متغیر) برای نمونه‌ای n تایی از یک جامعهٔ آماری را می‌توان در جدول ۱ـ۱۵ دید:

جدول ۱ـ۱۵ جدول توافقی برای آزمون استقلال

متغیر اول \ متغیر دوم	۱	۲	۳	...	c	مجموع
۱	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1c}	$n_{1.}$
۲	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2c}	$n_{2.}$
۳	n_{31}	n_{32}	n_{33}	...	n_{3c}	$n_{3.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	...	n_{rc}	$n_{r.}$
مجموع	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	...	$n_{.c}$	n

مقادیر n_{ij}، فراوانیهای مشاهده شده در هر سلول[1] است که فصل مشترک سطر i و ستون j می‌باشد. جمع سطر i، $n_{i.}$ و جمع ستون j، $n_{.j}$ علامتگذاری شده است.

با فرض صفر (H) یا فرضیهٔ استقلال دو متغیر، فراوانیهای مورد انتظار[2] (Fe_i) را برای هر سلول محاسبه می‌کنند. فراوانی مورد انتظار، تعداد (Fe_i) است که از حاصلضرب n در احتمال استقلال به دست می‌آید، یعنی:

$$Fe_i = f(x,y) \times n \text{ یا } Fe_i = \frac{(n_{i.} \times n_{.j})}{n} \qquad (۱۵\text{ـ}۳)$$

همچنین می‌توان از حاصلضرب جمع سطر i در جمع ستون j تقسیم بر n مقدار Fe هر سلول را محاسبه کرد. پس از محاسبهٔ Fe_i، فراوانیهای مورد انتظار با فراوانیهای مشاهده شده با هم مقایسه می‌شوند. اگر تمایز آنها «کوچک» باشد، فرضیهٔ صفر قابل دفاع است و نتیجه می‌گیریم که دو معیار (دو متغیر) از هم مستقل هستند، ولی اگر تمایز آنها «بزرگ» باشد، فرضیه صفر رد می‌شود و نتیجه می‌گیریم که دو متغیر از هم مستقل نیستند. بر مبنای اندازهٔ آمارهٔ آزمون می‌توان نتیجه گرفت که آیا تمایز بین فراوانیهای

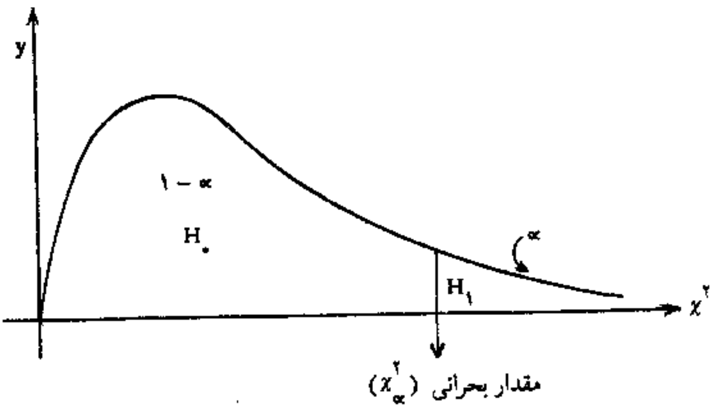
---
1. cell
2. expected frequency

مشاهده شده (Fo_i) و مورد انتظار (Fe_i) «کوچک» است یا «بزرگ» که به صورت معادلهٔ ۴ـ۱۵ بیان می‌شود:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i} \qquad (۱۵\text{ـ}۴)$$

در معادلهٔ ۴ـ۱۵ ، Fo_i و Fe_i به ترتیب فراوانیهای مشاهده شده و مورد انتظار در سلول‌های جدول ۱ـ۱۵ هستند. منطقی‌تر خواهد بود که فراوانیهای مشاهده شده و مورد انتظار را در سلول‌ها با Fo_{ij} و Fe_{ij} نشان دهیم، اما به منظور حفظ سادگی در علایم و فرمولها، علایم Fo_i و Fe_i را به کار می‌گیریم.

چنانچه سلول‌ها را از ۱ تا k شماره گذاری کنیم به ما کمک خواهد کرد. منظور از سلول ۱، سلول با زیرنویس ۱۱ و منظور از k، سلول با زیرنویس rc خواهد بود. می توان ثابت کرد که $\Sigma \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$، تقریباً از توزیع χ^2 با $(r-1)\times(c-1)$ درجهٔ آزادی برخوردار است. در صورتی که فرضیهٔ صفر درست باشد؛ اگر مقدار آمارهٔ آزمون در معادله ۴ـ۱۵ بزرگتر از مقدار کای ـ مربع جدول باشد پس فرض H_0 در سطح خطای α درصد رد شده و فرض H_1 (وجود ارتباط بین دو متغیر) پذیرفته خواهد شد. با این توصیف مشخص می‌شود که آزمون استقلال کای ـ مربع یک آزمون یک دنباله است که H_1 به اندازهٔ α در دنبالهٔ راست آن تعریف خواهد شد. منحنی آزمون استقلال در شکل ۱ـ۱۵ دیده می‌شود:



شکل ۱ـ۱۵ سطح زیر منحنی H_0 و H_1 در آزمون استقلال کای ـ مربع

مثال ۱ـ۱۵ فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «بین عملکرد کارمندان و میزان رضایت شغلی آنها ارتباط وجود دارد.» برای بررسی فرضیهٔ فوق یک نمونهٔ ۱۸۰ نفره از بین کارمندان به طور تصادفی انتخاب و میزان عملکرد و رضایت شغلی آنها اندازه‌گیری شده است. این جدول نشان‌دهندهٔ اطلاعات به دست آمده از نمونه است:

سطوح رضایت شغلی / سطوح عملکرد	بالا	متوسط	پایین	مجموع
خوب	۱۸	۲۰	۷	۴۵
متوسط	۱۵	۳۷	۳۸	۹۰
ضعیف	۷	۲۳	۱۵	۴۵
مجموع	۴۰	۸۰	۶۰	n=۱۸۰

سطح خطای ۵ درصد را در نظرگرفته و صحت فرضیهٔ فوق را بررسی کنید.

چنانکه پیداست، مراحل چهارگانهٔ آزمون فرض قابل اعمال است؛ بنابراین حل مسأله را با ذکر مراحل آزمون انجام می‌دهیم.

۱. **فرضها:** در آزمون استقلال، فرض H_0 همیشه نشان‌دهندهٔ استقلال دو متغیر و فرض H_1 نقیض آن است.

H_0: بین عملکرد و رضایت شغلی کارمندان ارتباط وجود ندارد

H_1: بین عملکرد و رضایت شغلی کارمندان ارتباط وجود دارد

۲. **آماره آزمون:** برای محاسبهٔ آمارهٔ آزمون فراوانیهای مورد انتظار را برای هر سلول براساس رابطه ۳ـ۱۵ محاسبه کرده و آنها را در کنار فراوانیهای مشاهده شده با علامت ○ مشخص می‌کنیم. مثلاً Fe_1 عبارت است از:

$$Fe_1 = \frac{(\text{مجموع سطر ۱})(\text{مجموع سطر ۲})}{۱۸۰}$$

یعنی:

$$Fe_1 = \frac{(۴۵)(۴۰)}{۱۸۰} = ۱۰$$

حال کل محاسبات در جدول زیر دیده می‌شود:

سطوح عملکرد \ سطوح رضایت شغلی	بالا	متوسط	پایین	مجموع
خوب	۱۸ (۱۰)	۲۰ (۲۰)	۷ (۱۵)	۴۵
متوسط	۱۵ (۲۰)	۳۷ (۴۰)	۳۸ (۳۰)	۹۰
ضعیف	۷ (۱۰)	۲۳ (۲۰)	۱۵ (۱۵)	۴۵
مجموع	۴۰	۸۰	۶۰	۱۸۰

براساس رابطهٔ ۴ـ۱۵ می‌توان نوشت:

$$\chi^{۲}=\frac{(۱۸-۱۰)^{۲}}{۱۰}+\frac{(۲۰-۲۰)^{۲}}{۲۰}+\frac{(۷-۱۵)^{۲}}{۱۵}+\ldots+\frac{(۲۳-۲۰)^{۲}}{۲۰}$$

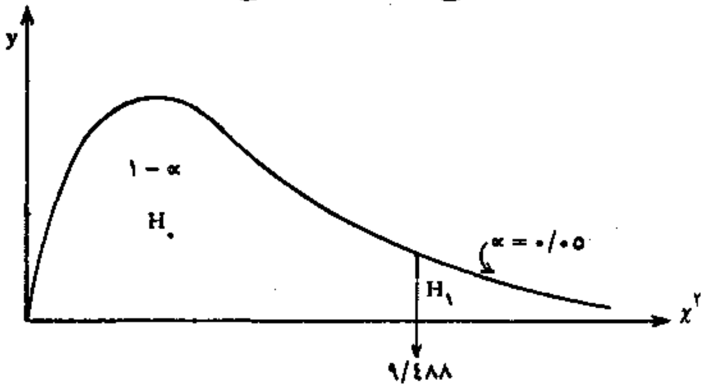
$$+\frac{(۱۵-۱۵)^{۲}}{۱۵}=۱۵/۶۲۵ \text{ آمارهٔ آزمون}$$

۳. مقدار بحرانی: گفته شد که آزمون استقلال، یک دنباله راست است؛ چون فقط تمایزات بزرگ بین Fo و Fe وجود دارد که نشان‌دهنده عدم استقلال است. همچنین مقدار بحرانی برحسب $\alpha = ۰/۰۵$ و $d.f=(r-۱)(c-۱)$ یعنی؛ $d.f=(۳-۱)(۳-۱)=۴$، محاسبه می‌شود.

پس:

$$\begin{cases}\alpha = ۰/۰۵ \\ d.f = ۴\end{cases} \Rightarrow \chi^{۲}_{۰/۰۵,۴} = ۹/۴۸۸ \text{ مقدار بحرانی}$$

مقدار بحرانی از جدول کای ـ مربع پیوست ۴ استخراج می‌شود.



٤. تصمیم‌گیری: از آنجا که آماره آزمون در ناحیهٔ H_1 قرار می‌گیرد. پس می‌توان گفت که در سطح اطمینان ۹۵ درصد بین عملکرد و رضایت شغلی کارمندان ارتباط معنی‌داری وجود دارد.

تمرین

۱. فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده‌است: «بین سطح بلوغ کارکنان و سبک رهبری مدیران ارتباط وجود دارد.» در راستای بررسی فرضیه، سطح بلوغ کارکنان و سبک رهبری ٢٤٠ مدیر از مدیران کشور اندازه گیری شده است. که خلاصه آن در جدول زیر آمده است:

سطح بلوغ کارکنان / سبک رهبری	M_1	M_2	M_3	M_4
S_1	۲۰	۱۵	۱۰	۵
S_2	۱۸	۱۵	۱۵	۱۲
S_3	۵	۱۰	۲۰	۳۵
S_4	۰	۵	۱۵	٤۰

در سطح خطای یک درصد صحت فرضیهٔ فوق را بررسی کنید.

۲. مطالعه‌ای دربارهٔ پانصد نفر از کارکنان یک شرکت انجام داده‌اند. این شرکت محصولی را تولید می‌کند که نسبت به ایجاد اختلال تنفسی در کارکنان آنان مشکوک هستند. مستخدمان شرکت را بر مبنای سطح ارائه محصول و نمایش علایم اختلالات تنفسی دسته‌بندی کرده و نتایج را در این جدول نشان داده‌اند.

سطح ارائه محصول / علایم	بالا	محدود	ارائه ناشناخته
بلی	۱۸۵	۳۳	۱۷
خیر	۱۲۰	۷۳	۷۲

در سطح معنی‌دار یک درصد آزمون کنید آیا داده‌ها دلیل کافی مبنی بر وجود رابطه‌ای بین سطح ارائه محصول و وجود علایم اختلال تنفسی به دست می‌دهند؟

۳. دلیل یک دنبالهٔ راست بودن آزمون استقلال کای ـ مربع چیست؟

۱۵ـ۳ آزمون همگونی

آزمون استقلال χ^2 مبتنی بر طرحی از نمونه‌گیری است که در آن یک نمونه تصادفی تکی به حجم n با توجه به دو صفت به طور همزمان رده‌بندی می‌شود. در جدول توافقی حاصل، هر دو مجموعهٔ فراوانیهای کل کناری، متغیرهای تصادفی هستند. در عین حال گاهی ممکن است جمع کل سطر یا ستون را تحت اختیار پژوهشگر قرار دهد؛ یعنی پژوهشگر می‌تواند نمونه‌های مستقل انتخابی از هر جمعیت را مشخص کند. در این صورت گفته می‌شود که یک مجموعه از جمع کل حاشیه‌ای ثابت بوده در حالی که مجموعهٔ دوم مربوط به معیار رده‌بندی که به نمونه‌ها اعمال می‌شود، تصادفی است. در چنین حالتی، آزمون همگونی را می‌توان ذکر کرد.

آزمون استقلال و آزمون همگونی نه تنها دو شیوهٔ مختلف نمونه‌برداری را ارائه می‌دهند، بلکه فرضیه‌های صفر و سؤالات متفاوتی را بیان می‌کنند. آزمون استقلال به این سؤال که آیا دو معیار رده‌بندی از هم مستقل هستند، مربوط می‌شود. آزمون همگونی پاسخگوی این سؤال است که آیا نمونه‌ها از جمعیتهایی انتخاب شده‌اند که نسبت به معیار رده‌بندی همگون هستند؟ در حالت دوم فرضیه صفر نشان‌دهنده این نکته است که نمونه‌ها از یک جمعیت انتخاب شده‌اند. علی‌رغم وجود اینگونه تفاوتها هم در مفهوم و هم در شیوهٔ نمونه‌برداری، هر دو آزمون از نظر نظری و ریاضی یکسان هستند.

فرض کنید که نمونه‌های تصادفی مستقل به ترتیب به حجمهای n_1 ، ... ، n_r از r جامعهٔ A_1 ، ... ، A_r انتخاب شده‌اند. با رده‌بندی هر نمونه به رسته‌های B_1 ، ... ، B_c یک جدول توافقی $r \times c$ که در جدول ۲ـ۱۵ نشان‌داده شد به دست می‌آید. در این جدول مجموع سطرها، حجمهای نمونه‌ای ثابتی هستند. احتمالهای رسته‌ای مختلف B ی درون هر جامعه در جدول ۳ـ۱۵ ظاهر می‌شوند، که در آن هر w_{ij} یک احتمال شرطی را نشان می‌دهد.

$$w_{ij} = P(B_j \mid A_i) = \text{احتمال } B_j \text{ ی درون جامعهٔ } A_i \qquad (۱۵\text{ـ}۵)$$

توجه کنید که احتمال کل هر سطر جدول ۳ـ۱۵ برابر یک است، اما مجموع ستونها مفهوم چندانی ندارند.

جدول ۱۵.۲ یک جدول $r \times c$ با مجموع سطری ثابت

	B_1	B_2	...	B_c	مجموع
A_1					$n_{1.}$
⋮					⋮
A_r					n_{rc}
کل	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.c}$	۱۹

جدول ۱۵.۳ احتمالهای رسته‌های B ی درون هر جامعه A_i

	B_1	B_2	...	B_c	مجموع
A_1	w_{11}	w_{12}	...	w_{1c}	۱
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_r	w_{r1}	w_{r2}	...	w_{rc}	۱
مجموع					

این فرض صفر که احتمال هر ردهٔ B برای تمام r جامعه یکسان است می‌تواند اکنون به طور رسمی به این صورت بیان شود:

$$H_0 : w_{1j} = w_{2j} = \dots = w_{rj} , \qquad j = 1,2,\dots,C \qquad (۱۵\text{-}۶)$$

تحت فرض H_0، احتمال مشترک رستهٔ B_j را می‌توان از نمونه‌ایهای ادغام شده با توجه به این مطلب برآورد کرد که از کل n عنصر نمونه گیری شده، $n_{.j}$ عنصر، دارای رستهٔ B_j است. احتمال برآورد شده برابر است با:

$$\hat{w}_{1j} = \hat{w}_{2j} = \dots = \hat{w}_{rj} = \frac{n_{.j}}{n} \qquad (۱۵\text{-}۷)$$

و فراوانی مورد انتظار برآورد شده در سلول (i,j)ام، تحت فرض H_0 برابر است با:

(۱۵ـ۸)

$$Fe_i = \text{(احتمال برآورد شدهٔ } B_j \text{ درون } A_i) \times \text{(تعداد } A_i \text{ ی نمونه گیری شده)}$$

$$Fe_i = n_{i.} \times \hat{W}_{ij} = \frac{n_{i.} \times n_{.j}}{n} \qquad (۱۵ـ۹)$$

آمارهٔ آزمون با $\chi^2 = \Sigma \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$ نشان داده می‌شود. هریک از r جامعه دارای c خانه است و، $(c-1)$ درجهٔ آزادی به آمارهٔ χ^2 می‌دهد. از کل درجات آزادی؛ یعنی $r(c-1)$، تعداد پارامترهای برآوردشده کم می‌شود. چون c احتمال ستونی را که مجموع آنها یک است برآورد کرده‌ایم، تعداد پارامترهای برآورد شده برابر با $(c-1)$ است. در نتیجه:

$$d.f = r(c-1) - (c-1) = (r-1)(c-1) \qquad (۱۵ـ۱۰)$$

در مقایسه با سنجش استقلال می‌توان دید که فرمولهای χ^2 و همچنین درجه‌های آزادی یکسان هستند، فقط روش نمونه گیری و فرمولبندی فرض صفر برای این دو حالت متفاوتند.

مثال ۲ـ۱۵ از شرکت «الف»، ٤۰۰ نفر و از شرکت «ب»، ۳۰۰ نفر برای نمونه انتخاب شده‌اند. ۲۵۰ نفر از شرکت «الف» و ۱۵۰ نفر از شرکت «ب» از کیفیت محیط کار خود ناراضی بوده‌اند. آیا می‌توان گفت که نسبت افراد ناراضی در دو شرکت با همدیگر یکسان است؟

جدول ١٥ـ٤ جدول توافقی ۲×۲

	افراد ناراضی	افراد راضی	جمع
جامعه الف	۲۵۰ (۲۲۸/۵۷)	۱۵۰ (۱۷۱/٤۳)	٤۰۰
جامعه ب	۱۵۰ (۱۷۱/٤۳)	۱۵۰ (۱۲۸/۵۷)	۳۰۰
جمع	٤۰۰	۳۰۰	۷۰۰

$$\chi^2 = ۲/۰۰۹ + ۲/۶۷۸ + ۲/۶۷۸ + ۳/۵۷۲ = ۱۰/۹۳۷$$

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

این فرضیه‌هانشان‌دهندهٔ آزمون فرض نسبت موفقیتها در دو شرکت هستند؛ بنابراین باید قابل مقایسه با روش آزمون نسبت موفقیت باشند.

با فرض اینکه p_1 و p_2 به ترتیب احتمالهای نارضایتی برای شرکت «الف و ب» باشند، مایلیم فرض صفر، $H_0 : p_1 = p_2$ را در برابر $H_1 : p_1 \neq p_2$ آزمون کنیم. برای آزمون توافقی χ^2، فراوانیهای مورد انتظار که به روش معمولی محاسبه شده‌اند، در پرانتزهای جدول ۴ـ۱۵ نشان داده شده‌اند. مقدار محاسبه شدهٔ χ^2 برابر ۱۰/۹۳۷ با درجهٔ آزادی یک، چون این مقدار بزرگتر از ۳/۸۴۱ (مقدار ۵ درصد جدول χ^2 با درجهٔ آزادی یک) است فرض صفر رد می‌شود.

این مسأله مربوط به آزمون برابری دو نسبت دو جمله‌ای است و می‌توان به صورت دیگر، با استفاده از آزمون Z بحث شده در فصل یازدهم آن را حل کرد. برای به کاربردن Z، این محاسبات را باید انجام داد:

$$\bar{p}_1 = \frac{۲۵۰}{۴۰۰} = ۰/۶۲۵ \qquad \bar{p}_2 = \frac{۱۵۰}{۳۰۰} = ۰/۵۰ \qquad \Rightarrow \bar{p} = \frac{۲۵۰ + ۱۵۰}{۷۰۰} = ۰/۵۷۱$$

$\bar{p}$ برآورد ادغام شده $\bar{p}_1$ و $\bar{p}_2$ است. مقدار آمارهٔ آزمون عبارت است از:

$$Z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(۱-\bar{p})}\sqrt{\frac{۱}{n_1}+\frac{۱}{n_2}}} = \frac{(۰/۶۲۵-۰/۵۰)}{\sqrt{(۰/۵۷۱)(۰/۴۲۹)}\sqrt{\frac{۱}{۴۰۰}+\frac{۱}{۳۰۰}}} = ۳/۳۰۷$$

چون Z خارج از $Z_{۰/۰۲۵} = \pm ۱/۹۶$ است، فرض صفر در $\alpha = ۰/۰۵$ می‌شود. با محاسبهٔ جبری می‌توان نشان داد که Z^2 به طور دقیق همان χ^2 برای یک جدول توافقی ۲×۲

است. این موضوع در واقع حالت مربوط به مثال ماست، که در آن $\chi^2 = 10/937 = (3/307)^2 = Z^2$ است. بعلاوه $3/841 = (1/96)^2$ با نقطهٔ ۵ درصد χ^2 با درجهٔ آزادی یک برابر است. پس دو شیوهٔ آزمون هم‌ارزند. البته اگر فرض مقابل یکطرفه باشد، مثل $H_1: p_1 > p_2$؛ آنگاه آزمون χ^2 مناسب نیست.

تمرین

۱. از وزارتخانه‌های کشاورزی، صنایع و راه و ترابری به ترتیب ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ مدیر به طور تصادفی برگزیده شده‌اند. از این نمونه‌ها ۵۰ مدیر از وزارت کشاورزی، ۸۰ مدیر از وزارت صنایع و ۱۲۰ مدیر از وزارت راه و ترابری وظیفه‌مدار هستند. آیا می‌توان در سطح خطای یک درصد پذیرفت که نسبت مدیران وظیفه‌مدار در سه وزارتخانه یکسان است؟

۲. فرضیه یک تحقیق عبارت است از: «بلوغ پیروان در سطح سازمانهای «الف و ب و ج» یکسان است.» به منظور بررسی فرضیه فوق از هر سازمان یک نمونه تصادفی ۱۲۰ نفره انتخاب شده‌است. ۶۰ نفر از سازمان «الف»، ۸۰ نفر از سازمان «ب» و ۷۵ نفر از سازمان «ج» دارای بلوغ کاری بالا هستند. در سطح خطای یک درصد صحت فرضیه فوق را آزمون کنید.

۱۵-٤ فراوانیهای کوچک مورد انتظار

معمولاً در کاربرد آزمون کای-مربع فراوانی مورد انتظار برای یک یا بیشتر از یک طبقه کوچک، و شاید خیلی کمتر از یک، باشد.

در متون این نکته ذکر شده است که تقریب به وسیلهٔ χ^2 در صورتی که برخی از فراوانیهای مورد انتظار کوچک باشد از اعتبار جدی برخوردار نیست. در عین حال، در میان نویسندگان اتفاق‌نظر وجود ندارد که پیش از تعدیل نمودن فراوانیهای مورد انتظار یا صرف‌نظر کردن χ^2 به نفع آزمون دیگری، اندازه‌های فراوانیهای نظری چقدر باشد. برخی از نویسندگان بویژه متقدمان حدود کمتر از ۱۰ را پیشنهاد می‌کنند در حالی که دیگران معتقدند که فراوانیهای مورد انتظار کمتر از ۵ نباید باشد. کوکران[1]، که حدود سال ۱۹۵۰ مقاله‌ای نوشته‌است، پیشنهاد می‌کند که برای آزمونهای نیکویی برازش توزیعهای یک نمایی (مانند توزیع نرمال) دست کم فراوانی مورد انتظار کمتر از یک نباشد. چنانچه در عمل پژوهشگر بخواهد یک یا بیشتر از یک فراوانی مورد انتظار کمتر از یک را به حساب آورد، باید طبقات مجاور را ترکیب کند تا به حداقل مقدار

1. Cochran

پیشنهادی برسد. این نوع ترکیب طبقات، تعداد طبقات یا گروهها را کاهش می‌دهد و در نتیجه تعداد درجات آزادی نیز تقلیل می‌یابد. در سالهای اخیر نظریات کوکران در مقیاس وسیعی توسط آماردانان به کار رفته است.

۱۵ـ۵ آزمون نیکویی برازش

چنانکه خاطر نشان شد، آزمون برازندگی زمانی مناسب است که پژوهشگر بخواهد در مورد سازگاری یا ناسازگاری یک توزیع مشاهده شده با توزیع نظری تصمیم بگیرد؛ برای مثال ممکن است تصمیم‌گیری در مورد سازگاری یا ناسازگاری نمونه‌ای از مقادیر مشاهده شدهٔ متغیری تصادفی با این فرضیه که نمونه مزبور از جامعهٔ نرمال است مد نظر باشد. شیوهٔ تصمیم‌گیری بدین گونه است که مقادیر را در طبقه‌های مانعةالجمع (ناسازگار) قرار داده و توجه خود را به فراوانی آنها در هر طبقه معطوف گردانیم. سپس از آگاهی خود دربارهٔ توزیع نرمال بهره گیریم تا فراوانی مورد انتظار هریک از طبقات را در صورتی که نمونه از جامعهٔ نرمال انتخاب شده باشد تعیین کنیم. چنانچه اختلاف بین مقادیر مشاهده شده و مقادیر انتظاری، به شرط آنکه نمونه‌برداری از توزیع نرمال صورت گرفته باشد، بزرگتر از حدی باشد که بتوان آن را تصادفی دانست، می‌توان چنین نتیجه گرفت که نمونه از توزیع نرمال انتخاب نشده است. اگر این تمایز شانسی باشد، نتیجه می‌شود که نمونه ممکن است از جامعهٔ نرمال انتخاب شده باشد. به همین ترتیب می‌توان آزمون نیکویی برازش را در مواردی که توزیع نظری یکنواخت، پواسون، دو جمله‌ای یا هر توزیع دیگری باشد، به کاربرد. حال با بررسی مثالهایی به توضیح بیشتر در این باره می‌پردازیم.

مثال ۱۵ـ۳ آزمون نیکویی برازش مربوط به توزیع نرمال. این آزمون را با استفاده از یک مثال دنبال می‌کنیم. فرض کنید طول ۱۰۰ میلهٔ تولیدی از محصولات یک کارخانه اندازه‌گیری شده و در جدول زیر (۱۵ـ۵) آمده است:

برای محاسبهٔ فراوانیهای نظری (مورد انتظار) که به وسیلهٔ یک توزیع نرمال تولید شده باشند از طریق این مراحل اقدام کنید:

۱. اگر ضرورت دارد مقدار μ_x و σ_x^2 را تخمین بزنید. به منظور بررسی اینکه آیا یک نمونه از توزیع نرمال برخوردار است یا خیر ما به میانگین و انحراف معیار آن جامعه نیاز داریم. در این مثال که مقدار میانگین و انحراف معیار مجهول است ناچاریم که این مقادیر را به کمک نمونه فوق برآورد کنیم:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma Fo_i X_i}{\Sigma Fo_i} = ۱۳۸/۱۰$$

(۱۵ـ۱۱)

$$S_x^2 = \frac{\Sigma (X_i - \bar{X})^2 Fo_i}{\Sigma Fo_i - 1} = ۳۴۲/۴۶$$

جدول ۱۵.۵ طول ۱۰۰ میله (برحسب میلیمتر)

طول (برحسب میلیمتر)	تعداد (Fo_i)
۸۰–۸۹	۱
۹۰–۹۹	۰
۱۰۰–۱۰۹	۳
۱۱۰–۱۱۹	۱۰
۱۲۰–۱۲۹	۱۹
۱۳۰–۱۳۹	۲۱
۱۴۰–۱۴۹	۲۳
۱۵۰–۱۵۹	۱۱
۱۶۰–۱۶۹	۸
۱۷۰–۱۷۹	۱
۱۸۰–۱۸۹	۲
۱۹۰–۱۹۹	۳
مجموع	۱۰۰

۲. حدود طبقات حقیقی را برای هر طبقه و هر گروه از داده‌ها (حدود کرانه‌ها) پیدا کنید. برای پیدا کردن حدود کرانه‌ها از حد پایین هر طبقه $\frac{1}{2}$ کم کنید و به حد بالای آن طبقه اضافه کنید. حدود واقعی طبقات دارای فاصلهٔ یکسان است:

میلیمتر (۷۹/۵–۸۹/۵)

میلیمتر (۸۹/۵–۹۹/۵)

میلیمتر (۹۹/۵–۱۰۹/۵)

⋮

۳. حد بالای هر طبقه، مقداری است که برای استانداردکردن طبقات به کار می‌رود:

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$$

ولی ما به دلیل استفاده از نمونه به جای آن از این رابطهٔ جایگذاری استفاده خواهیم کرد:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S_x}$$

رای مثال برای استاندارد کردن ۸۹/۵ به این شرح عمل می‌شود:

$$Z=\frac{۸۹/۵-۱۳۸/۱۰}{۱۸/۵}=-۲/۶۳$$

٤. سطح زیر منحنی سمت چپ حد بالای هر طبقه ((z) ϕ سطح زیر منحنی متناظر با مقدار استاندارد که تراکمی از تابع احتمال نرمال صفر و یک است) را پیدا کنید. برای X = ۸۹/۵ ، Z = −۲/۶۳ و ϕ (z) = ۰/۰۰٤۲٤ است.

۵. فراوانیهای مورد انتظار به آسانی از فراوانیهای تراکمی حاصل می‌شوند. جدولهای ۱۵ـ٦ و ۱۵ـ۷ تمامی محاسبات فراوانی مورد انتظار تراکمی و مورد انتظار هر طبقه از یک توزیع (۱۸/۵ و ۱۳۸/۱) N را نشان می‌دهند. توجه شود که قبل از اولین طبقه یک طبقهٔ دیگر که با ۷۹/۵ شروع می‌شود، اضافه شده است و یک طبقه نیز در آخر اضافه شده است.

در این مثال نیز جدول تجدید نظر شده که نشان‌دهندهٔ طبقات ادغام شده است، فراهم آمده است.

جدول ۱۵.٦ فراوانی مورد انتظار تراکمی

فراوانیهای مورد انتظار	فراوانیهای تراکمی ۱۰۰×ϕ (Z)	ϕ (Z)	Z	حد بالا	حدود کرانه
۰	۰	۰/۰۰۰۸	−۳/۱۷	۷۹/۵	۷۹/۵ و کمتر
۰/٤	۰/٤	۰/۰۰٤۳	−۲/۶۳	۸۹/۵	۷۹/۵−۸۹/۵
۱/٤	۱/۸	۰/۰۱۸۳	−۲/۰۹	۹۹/۵	۸۹/۵−۹۹/۵
٤/۳	٦/۱	۰/۰٦۰٦	−۱/۵۵	۱۰۹/۵	۹۹/۵−۱۰۹/۵
۹/۵	۱۵/٦	۰/۱۵٦۲	−۱/۰۱	۱۱۹/۵	۱۰۹/۵−۱۱۹/۵
۱٦/۷	۳۲/۳	۰/۳۲۲۸	−۰/٤٦	۱۲۹/۵	۱۱۹/۵−۱۲۹/۵
۲۰/۹	۵۳/۲	۰/۵۳۱۹	۰/۰۸	۱۳۹/۵	۱۲۹/۵−۱۳۹/۵
۲۰/۰	۷۳/۲	۰/۷۳۲٤	۰/٦۲	۱٤۹/۵	۱۳۹/۵−۱٤۹/۵
۱٤/۵	۸۷/۷	۰/۸۷۷۰	۱/۱٦	۱۵۹/۵	۱٤۹/۵−۱۵۹/۵
۷/۸	۹۵/۵	۰/۹۵۵٤	۱/۷۰	۱٦۹/۵	۱۵۹/۵−۱٦۹/۵
۳/۲	۹۸/۷	۰/۹۸۷۵	۲/۲٤	۱۷۹/۵	۱٦۹/۵−۱۷۹/۵
۱/۰	۹۹/۷	۰/۹۹۷۳	۲/۷۸	۱۸۹/۵	۱۷۹/۵−۱۸۹/۵
۰/۲	۹۹/۹	۰/۹۹۹۵۲	۳/۳۲	۱۹۹/۵	۱۸۹/۵−۱۹۹/۵
۰/۱	۱۰۰	۱	∞	∞	۱۹۹/۵ و بیشتر
۱۰۰	−	−	−	−	مجموع

جدول ۱۵.۷ محاسبهٔ χ^2 با استفاده از فراوانیهای تجدیدنظرشده

حد بالا برای X	Fo_i	Fe_i	$\frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$
۱۰۹/۵	۴	۶/۱	۰/۷۲۳
۱۱۹/۵	۱۰	۹/۵	۰/۰۲۶
۱۲۹/۵	۱۹	۱۶/۷	۰/۳۱۷
۱۳۹/۵	۲۱	۲۰/۹	۰/۰۰۰
۱۴۹/۵	۲۳	۲۰/۰	۰/۴۵۰
۱۵۹/۵	۱۱	۱۴/۵	۰/۸۴۵
۱۶۹/۵	۸	۷/۸	۰/۰۰۵
∞	۴	۴/۵	۰/۰۵۶
مجموع	۱۰۰	۱۰۰	۲/۴۲۲

برای محاسبهٔ درجهٔ آزادی، ما باید تعداد محدودیتها را تعیین کنیم. طبق معمول دو محدودیت ناشی از محاسبهٔ $\bar{X}$ و S_x^2 برای تخمین μ_x و σ_x^2 و یک محدودیت نیز برای مساوی شدن مجموع فراوانیهای مورد انتظار با ۱۰۰ از دست خواهد رفت:

$$d.f = ۸ - ۱ - ۲ = ۵$$

بنابراین مقدار بحرانی آزمون در سطح خطای ۵ درصد، مساوی ۱۱/۰۷ خواهد شد. از آنجایی که مقدار آمارهٔ آزمون ($\chi^2 = ۲/۴۲۲$) کوچکتر از مقدار بحرانی (۱۱/۰۷) است، پس فرضیه صفر؛ [$H_0 : X \sim N(۱۳۸/۱ , ۱۸/۵)$]؛ در سطح اطمینان ۹۵ درصد تأیید می‌شود.

مثال ۱۵.۴ آزمون و بررسی مدل پواسون. در این بخش با استفاده از یک مثال مراحل آزمون فرض نیکویی برازش در خصوص توزیع پواسون را تشریح می‌کنیم.

ما داده‌های جمع‌آوری شده را در خصوص تعداد اتومبیلهایی که با فاصلهٔ پانزده دقیقه از یک بزرگراه می‌گذرند بررسی می‌کنیم. برای جمع‌آوری اطلاعات در یک نقطه‌ای از بزرگراه تعداد اتومبیلهایی که در ۷۶ موقعیت پانزده

دقیقه‌ای عبور کرده‌اند مشاهده شده است (جدول ۸ـ۱۵).

جدول ۸ـ۱۵ جدول فراوانی تعداد اتومبیلها در فواصل ۱۵ دقیقه‌ای

X_i	۰	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	مجموع
Fo_i	۱	٤	۸	٦	۱۷	۱۸	۱۳	۳	۳	۱	۱	۱	۰	۷٦

محاسبهٔ فراوانیهای نظری (مورد انتظار) در یک مدل پواسون. اولین قدم محاسبه میانگین فراوانیهای مشاهده شده است. این میانگین، در واقع تخمینی از μ جامعه است که به عنوان میانگین توزیع پواسون برای محاسبهٔ احتمالات مشاهدات استفاده خواهد شد. البته این تخمین موجب کاهش درجات آزادی می‌گردد. میانگین جدول فوق ٤/٦ است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

(۱۵ـ۱۲)

$$\bar{X} = \bar{\lambda} = \frac{\Sigma Fo_i X_i}{\Sigma Fo_i} = \frac{۳٤۹}{۷٦} = ٤/٦$$

مجدداً تعدادی از فراوانیهای نظری کمتر از ٥ هستند؛ بنابراین قاعدهٔ کرامر را در خصوص این طبقات اعمال می‌کنیم. جدول ۱۱ـ۱۵ نشان‌دهندهٔ فراوانیهای تجدیدنظر شده است.

آزمون معنی‌دار بودن. جدول نهایی هفت طبقه با دو محدودیت دارد: اول اینکه مجموع فراوانیهای نظری باید مساوی ۷٦ باشد و دوم؛ مقدار میانگینی که برای محاسبهٔ احتمالات به کمک نمونه برآورد شد؛ بنابراین:

$$d.f = ۷ - ۱ - ۱ = ٥$$

مقدار بحرانی χ^2 در سطح معنی‌دار ٥ درصد برابر ۱۱/۰۷ با درجهٔ آزادی ٥ است. فرضیه‌های آماری H_0 و H_1:

$$H_0 : X \sim P(٤/٦)$$

$$H_1 : X \nsim P(٤/٦)$$

جدول ۱۵.۹ محاسبهٔ فراوانیهای نظری از یک توزیع پواسون با $\bar{\lambda} = ٤/٦٠$

X_i	$P(X=x_i) = [e^{-٤/٦}(٤/٦)^x]/X!$	$Fe_i = ٧٦ \times p(X=x_i)$
۰	= ۰/۰۱۰۰۵	۰/۸.
۱	= ۰/۰٤٦٢	۳/۵
۲	= ۰/۱۰٦۳	۸/۱
۳	= ۰/۱٦۳۱	۱۲/٤
٤	= ۰/۱۸۷۵	۱٤/۳
۵	= ۰/۱۷۲۵	۱۳/۱
٦	= ۰/۱۳۲۳	۱۰/۱
۷	= ۰/۰۸٦۹	٦/٦
۸	= ۰/۰۵۰۰	۳/۸
۹	= ۰/۰۲۵۵	۱/۹
۱۰	= ۰/۰۱۱۸	۰/۹
۱۱ و بیشتر	$1 - P(X \leq ۱۰)$=۰/۰۰۷۸۵	۰/۵

جدول ۱۵.۱۰ فراوانیهای مشاهده شده و نظری

X_i	۰	۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱ و بیشتر
Fo_i	۱	٤	۸	٦	۱۷	۱۸	۱۳	۳	۳	۱	۱	۱
Fe_i	۰/۸۰	۳/۵	۸/۱	۱۲/٤	۱٤/۳	۱۳/۱	۱۰/۱	٦/٦	۳/۸	۱/۹	۰/۹۰	۰/۵۰

جدول ۱۵.۱۱ فراوانیهای مشاهده و نظری تجدید نظر شده

X_i	۰,۱,۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸ و بیشتر
Fo_i	۱۳	٦	۱۷	۱۸	۱۳	۳	٦
Fe_i	۱۲/٤	۱۲/٤	۱٤/۳	۱۳/۱	۱۰/۱	٦/٦	۷/۱۰

حال با استفاده از رابطهٔ $\chi^۲ = \Sigma \frac{(Fo_i - Fe_i)^۲}{Fe_i}$ محاسبه می‌شود که چگونگی محاسبهٔ آن در جدول ۱۲ـ۱۵ آمده است:

جدول ۱۵.۱۲ محاسبهٔ کای ـ مربع

X_i	Fo_i	Fe_i	$(Fo_i - Fe_i)/^{۲}Fe_i$
۰,۱,۲	۱۳	۱۲/٤۰	۰/۰۳
۳	٦	۱۲/٤۰	۳/۳۰
٤	۱۷	۱٤/۳۰	۰/۵۱
۵	۱۸	۱۳/۱۰	۱/۸۳
٦	۱۳	۱۰/۱۰	۰/۸۳
۷	۳	٦/٦۰	۱/۹٦
۸ و بیشتر	٦	۷/۱۰	۰/۱۷
مجموع	۷٦	۷٦	۸/٦۳

$\chi^۲$محاسبه شده کوچکتر از مقدار بحرانی $\chi^۲ = ۱۱/۰۷$است؛ بنابراین می‌توان ادعا کرد که فرض $H_۰$(برخوردار بودن عبور ماشینها ۷ و ۰/۰۵ از توزیع پواسون) تأیید می‌شود.

در این مثال ما شدیداً به قاعده فراوانیهای کوچک توجه کردیم به طوری که فراوانیهای نظری کمتر از ۵ را در همدیگر ادغام کردیم. در حالی که این قاعده از انعطاف‌پذیری معقولی برخوردار است، اهمیت این گفته را به این شرح نشان می‌دهیم:

با تلفیق $X = ۰$ و $X = ۱$ ما یک فراوانی نظری ٤/۳ را خواهیم داشت و این به آن معنی است که نباید $X = ۲$ را در صفر و یک ادغام کنیم. همچنین به جای ادغام طبقات $X = ۸, ۹, ۱۰, ۱۱$ فقط طبقات $X = ۹, ۱۰, ۱۱$ را در همدیگر ادغام می‌کنیم که فراوانی نظری ۳/۳ را به دست می‌دهد. خلاصه آنکه حاصل این ترکیبات جدید جدول ۱۳ـ۱۵ خواهد شد:

جدول ۱۵.۱۳ فراوانیهای مورد انتظار و مشاهده شده

x_i	۰ , ۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸	۹ , ۱۰ , ۱۱
Fo_i	۵	۸	٦	۱۷	۱۸	۱۳	۳	۳	۳
Fe_i	٤/۳	۸/۱	۱۲/٤	۱٤/۳	۱۳/۱	۱۰/۱	٦/٦	۳/۸	۳/۳۰

این ترتیب جدید دو طبقه بیشتر (و همچنین دو درجهٔ آزادی بیشتر) از روش قبلی به دست می‌دهد؛ یعنی:

$$d.f = ۹ - ۲ = ۷$$

مقدار بحرانی کای ـ مربع در سطح خطای ۵ درصد برابر ۱۴/۰۷ است. مقدار χ^2 در جدول ۱۵ـ۱۳ برابر ۸/۷۵ خواهد شد (فقط ۱۰ درصد با کای - مربع جدول ۱۵ـ۱۲ تفاوت دارد). با این وجود اضافه شدن دو طبقه باعث شده است که مقدار بحرانی کای ـ مربع به ۱۴/۰۷ افزایش یابد (این مقدار با مقدار ۱۱/۰۷ مقایسه کنید). نتیجه آنکه محاسبهٔ کای ـ مربع براساس فراوانیهای مورد انتظار ۳، ۴ یا ۵ شدیداً مقدار بحرانی کای ـ مربع را تحت تأثیر قرار می‌دهد که باعث می‌شود فرض H_0 را بسختی رد کرده یا بپذیریم. در حالی که تأثیر قواعد فوق بر مقدار آمارهٔ آزمون اندک خواهد بود.

مثال ۱۵ـ۵ تولید اعداد تصادفی. یکی از کاربردهای آزمون نیکویی برازش پاسخ به این سؤال است که «آیا داده‌های تصادفی تولید شده از توزیع خاصی برخوردارند یا خیر؟» ما برای نشان دادن کاربرد توضیح کای ـ مربع در این زمینه به بررسی توزیع یکنواخت طی این مثال می‌پردازیم:

جدول ۱۵ـ۱۴ نشان‌دهندهٔ وضعیت خلاصه شدهٔ صد عدد تصادفی است که به کمک کامپیوتر تولید شده‌اند. حال این سؤال مطرح است که «آیا اعداد تولید شده از یک توزیع یکنواخت حاصل شده‌اند؟» برای بررسی این توزیع می‌توان به بررسی

جدول ۱۵ـ۱۴ جدول فراوانی مطلق هریک از اعداد تصادفی

اعداد تصادفی	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	جمع
فراوانی مطلق	۱۳	۸	۱۲	۱۱	۱۰	۵	۷	۱۱	۱۱	۱۲	$\Sigma = ۱۰۰$

فرضیه‌های زیر پرداخت:

H_0 : اعداد تصادفی فوق از یک توزیع یکنواخت تولید شده‌اند

H_1 : اعداد تصادفی فوق از یک توزیع یکنواخت تولید نشده‌اند

برای محاسبهٔ آمارهٔ آزمون باید اختلاف بین فراوانیهای مشاهده‌شده (Fo_i) و فراوانیهای مورد انتظار (Fe_i) محاسبه شود. چون مقادیر منفی و مثبت تفاضل ($Fe_i - Fo_i$) همدیگر را خنثی می‌کنند پس مجموع اختلاف بین آنها برابر صفر است. برای غلبه بر چنین معضلی لازم است از مجذور تفاضل دو فراوانی استفاده شود. در مثال ما هریک

از فراوانیهای مورد انتظار با همدیگر برابرند ولی این امر همیشه صادق نیست. اگر چنانچه آزمون را به کمک مجموع مربعات تفاوتها برگزار کنیم، پس باید به اختلافات مشابه از یک فراوانی مورد انتظار کوچکتر اهمیت بیشتری داده و به همان اختلاف مشابه از یک فراوانی مورد انتظار بزرگتر اهمیت کمتری بدهیم (برای مثال یک اختلاف ۵ تایی زمانی که فراوانی مورد انتظار ۱۰ است باید با اهمیت‌تر از وقتی باشد که ۱۰۰ است).

یکی از روشهای در نظر گرفتن چنین امری تقسیم کردن مربع اختلافات بر فراوانیهای مورد انتظار هر طبقه (مقوله) است؛ بنابراین آمارهٔ آزمون مورد نظر ما به شرح زیر فراهم می‌آید:

$$\chi^2 = \sum \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i} \qquad (۱۵\text{-}۱۳)$$

هرچه اختلاف بین فراوانیهای مورد انتظار و مشاهده شده بیشتر باشد مقدار χ^2 بیشتر خواهد شد.

جدول ۱۵ـ۱۵ محاسبهٔ آمارهٔ آزمون در مثال تولید اعداد تصادفی

اعداد تصادفی	Fo_i	$Fe_i = n \times \frac{1}{10}$	$(Fo_i - Fe_i)^2$	$\frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$
۰	۱۳	۱۰	۹	۰/۹۰
۱	۸	۱۰	٤	۰/٤۰
۲	۱۲	۱۰	٤	۰/٤۰
۳	۱۱	۱۰	۱	۰/۱۰
٤	۱۰	۱۰	۰	۰/۰۰
۵	۵	۱۰	۲۵	۲/۵
٦	۷	۱۰	۹	۰/۹۰
۷	۱۱	۱۰	۱	۰/۱۰
۸	۱۱	۱۰	۱	۰/۱۰
۹	۱۲	۱۰	٤	۰/٤۰
	۱۰۰	۱۰۰		$\Sigma =$ ۵/۸

واضح است که مجموعه‌های متفاوت صدتایی از اعداد تصادفی معمولاً مقادیر متفاوتی برای χ^2 ارائه خواهد داد. ما باید توزیع همهٔ مقادیر این آمارهٔ

آزمون را براساس مجموعه‌های صدتایی ممکن از اعداد تصادفی پیدا کنیم؛ اما این امر ضرورتی ندارد، چون توزیع χ^2 محاسبه شده بسیار نزدیک به توزیع نظری کای ـ مربع است. برای هر توزیع کای ـ مربع تعداد درجات آزادی نشان‌دهندهٔ استقلال در تخصیص فراوانیهای مورد انتظار است. در مثال ما ۱۰ فراوانی مورد انتظار وجود دارد که فقط در ۹ تای آنها استقلال وجود دارد و دهمی باید به گونه‌ای انتخاب شود که مجموع فراوانیهای مورد انتظار صد شود. این حقیقت که مجموع فراوانیهای مورد انتظار باید ب مجموع فراوانیهای تجربی برابر گردد، خود محدودیتی را ایجاب می‌کند.

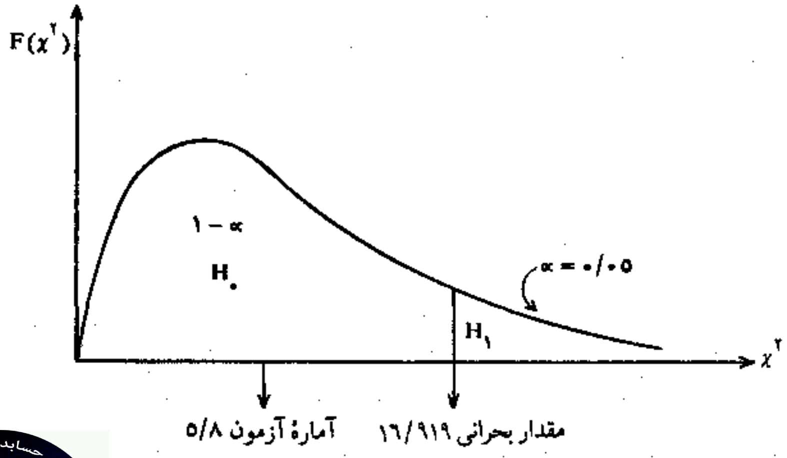
محاسبهٔ درجات آزادی بدین صورت است:

$$d.f = (\text{تعداد طبقات}) - (\text{تعداد محدودیتها})$$

بنابراین:

$$d.f = ۱۰ - ۱ = ۹$$

پس مقدار آمارهٔ آزمون برای مثال ما مساوی ۵/۸ است. حال باید دید که مقدا کای ـ مربع با ۹ درجهٔ آزادی، چقدر است؟ براساس مقدار $\alpha = ۰/۰۵$ و درجهٔ آزادی ۹ مقدار بحرانی کای ـ مربع از جدول ٤ پیوست مساوی با ۱۶/۹۱۹ است؛ بنابراین در سطح اطمینان ۹۵ درصد می‌توان گفت که فرض H_0 که دلالت بر یکنواخت بودن اعدا تصادفی دارد پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان دید که:



۱۵ـ۶ اصلاح یتس[1]

فراوانیهای مورد انتظار در آزمونهای کای ـ مربع (بخصوص جداول توافقی) گسسته است؛ بنابراین آمارهٔ آزمون، شاخص آماری گسسته را ارائه می‌دهد که آن را با توزیع کای ـ مربع که پیوسته است تقریب می‌زنند. یتس در سال ۱۹۳۴ شیوه‌ای را به منظور اصلاح چنین موردی در آزمونهای کای ـ مربع که یک درجهٔ آزادی دارند، پیشنهاد کرده است. براساس اصلاح یتس، چنانچه مقدار درجهٔ آزادی مساوی یک باشد، به جای استفاده از آمارهٔ آزمون معمول کای ـ مربع باید از این رابطه برای محاسبهٔ آمارهٔ آزمون استفاده کرد:

$$\chi^2_{\text{اصلاح شده}} = \Sigma \frac{(|Fo_i - Fe_i| - ۰/۵۰)^۲}{Fe_i} \qquad (۱۵\text{ـ}۱۴)$$

چنانکه واضح است در این رابطه باید از قدر مطلق تفاضل فراوانیهای مشاهده شده و مورد انتظار نیم واحد کم کرده و سپس به توان دو رساند. بدین ترتیب آمارهٔ آزمون به واقع نزدیکتر خواهد شد.

تمرین

۱. یک دانشجوی کارشناسی ارشد در پایان‌نامه خود ادعا کرده است که «توزیع مدیران در سازمان مورد تحقیق یکنواخت[2] نیست. نتایج حاصل از نمونهٔ وی از سه سطح مدیریت به این شرح است:

سطح مدیریت	عملیاتی	میانی	عالی
تعداد مدیران	۴۴۰	۳۶۰	۱۰۰

آیا می‌توان در سطح معنی‌دار ۵ درصد ادعای وی را پذیرفت؟ نتایج مدیریتی رد یا قبول این فرضیه را تحلیل کنید.

۲. ادعا شده که تعداد تصادفات منجر به مرگ در ایران از توزیع پواسون برخوردار است. برای بررسی این ادعا از پنجاه شهر ایران به طور هفتگی اطلاعاتی جمع‌آوری شده‌است. نتایج جمع‌آوری داده‌ها در جدول زیر آمده است:

تصادفات منجر به مرگ	۰	۱	۲	۳	۴
تعداد شهر	۵	۱۵	۱۲	۱۳	۵

1. Yates correction
2. uniform

در سطح خطای یک درصد آیا می‌توان ادعای فوق را پذیرفت. چرا؟

۳. یک گروه تحقیقاتی مطالعه‌ای را در خصوص ظرفیت اشغال شدهٔ (به درصد) بیمارستانهای کشور برنامه‌ریزی کرده‌است. تصور بر این است که ظرفیت اشغال شده بیمارستانها از توزیع نرمال؛ $[X \sim N(۶۹/۹۱, ۱۹/۰۲)]$، برخوردار است. از ۲۵۰ بیمارستان در سطح کشور که به طور تصادفی انتخاب شده، داده‌های ۱۲ ماهه به دست آمده است که به این صورت طبقه‌بندی شده‌اند:

تعداد بیمارستان	نسبت اشغال شده
۱۶	۴۰ و کمتر
۱۸	۴۰-۵۰
۲۲	۵۰-۶۰
۵۱	۶۰-۷۰
۶۲	۷۰-۸۰
۵۵	۸۰-۹۰
۲۲	۹۰-۱۰۰
۴	۱۰۰-۱۱۰

آیا نمونه به دست آمده صحت تصور بالا را تأیید می‌کند؟ $(\alpha = ۰/۰۱)$.

۱۵ـ۷ خلاصه

در این فصل دربارهٔ استفاده‌های متنوع توزیع کای ـ مربع و آزمونهای استقلال و همگنی بحث شد. گرچه آزمونها از نظر ریاضی معادل یکدیگرند، از نظر مفهومی با هم فرق دارند. شیوهٔ بررسی به محاسبهٔ شاخص آماری به این صورت می‌انجامد:

$$\chi^۲ = \Sigma \frac{(Fo_i - Fe_i)^۲}{Fe_i}$$

شاخص فوق، تفاوت بین فراوانیهای مشاهده شده (Fo_i) و مورد انتظار (Fe_i) وقوع مقادیر را در طبقات مجزا از هم اندازه می‌گیرد. چنانچه آمارهٔ فوق کوچکتر یا مساوی مقدار بحرانی، $\chi^۲_{\alpha, d.f}$، باشد، فرض $H_۰$ پذیرفته خواهد شد؛ در غیر این صورت در سطح خطای مورد نظر رد می‌شود.

همچنین در فصل حاضر، آزمون نیکویی برازش برای تعیین نوع توزیع جامعهٔ آماری تشریح شده و آزمونهای برازش برای توزیع نرمال، پواسون و یکنواخت ارائه شد.

آزمونهای مزبور به ترتیب استقلال دو متغیر و همگنی نسبتها را در میان دو گروه یا بیشتر و برازش داده‌های مشاهده شده را با داده‌های نظری بررسی می‌کنند.

۸ـ۱۵ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. آزمون استقلال کای ـ مربع یک آزمون دو دامنه است. ص ☐ غ ☐

۲. جدول توافقی آزمون استقلال کای ـ مربع دو حاشیهٔ تصادفی دارد. ص ☐ غ ☐

۳. جدول توافقی آزمون همگونی کای ـ مربع یک حاشیهٔ تصادفی دارد. ص ☐ غ ☐

۴. در آزمون استقلال کای ـ مربع، H_0 نشان‌دهندهٔ صفر بودن کوواریانس x و y است. ص ☐ غ ☐

۵. اصلاح یتس صرفاً برای جداول توافقی ۲×۲ در آزمون استقلال است. ص ☐ غ ☐

۶. اگر فراوانی مشاهدهٔ شدهٔ یک طبقه کمتر از ۵ باشد، آن طبقه حتماً در طبقهٔ مجاور ادغام می‌شود. ص ☐ غ ☐

۷. آزمون همگونی یک نوع آزمون تساوی نسبتهاست. ص ☐ غ ☐

۸. آزمون استقلال کای ـ مربع فقط وقتی به کار می‌رود که هر دو متغیر کیفی هستند. ص ☐ غ ☐

۹. هرچه تفاوت فراوانیهای مشاهده شده و انتظاری کمتر باشد، احتمال پذیرش H_0 بیشتر است. ص ☐ غ ☐

۱۰. در آزمون نیکویی برازش، H_0 نشان دهندهٔ نوع توزیع مورد نظر است. ص ☐ غ ☐

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. درجهٔ آزادی یک توزیع کای ـ مربع ۵ است. میانگین و واریانس آن از چپ به راست کدام است؟

الف) (۵، ۵) ج) (۱۰، ۱۰)

ب) (۵، ۱۰) د) (۱۰، ۵)

۱۲. یک جدول توافقی با ۳ ردیف و ۴ ستون وجود دارد. تعداد درجات آزادی آن کدام است؟

الف) ۲ ج) ۶

ب) ۳ د) ۱۲

۱۳. مقدار آمارهٔ آزمون ۸/۳۵ است. اگر حالتهای زیر نشان‌دهندهٔ مقادیر بحرانی در سطح α های مختلف باشد. در چه صورتی H_0 رد می‌شود.

الف) ۷/۷۷۹ ج) ۱۱/۱۴۳

ب) ۹/۴۸۸ د) ۱۳/۲۷۷

۱۴. آزمون نیکویی برازش کدام یک از آزمونهای زیر است؟

الف) یک دنبالهٔ چپ ج) دو دنباله

ب) یک دنبالهٔ راست د) به تعریف H_0 و مقدار α بستگی دارد.

۱۵. مقادیر Fo_i و Fe_i به این صورت تعریف شده است:

Fo_i	۵	۱۰	۸	۷
Fe_i	۵	۸	۹	۸

مقدار آمارهٔ آزمون کدام است؟

الف) ۱/۲۵۴ ج) ۰/۲۵۱

ب) ۲/۷۵۳ د) ۰/۷۳٦

۱٦. در سؤال ۱۵ اگر H_0 نشان‌دهندهٔ توزیع یکنواخت باشد، تعداد درجات آزادی چقدر است؟

الف) ٤ ج) ۳

ب) ۲ د) ۱

۱۷. جدول توافقی آزمون همگونی کدام یک از جدولهای زیر است.

الف) جدولی با یک کنارهٔ ردیفی ثابت ج) جدولی با یک کنارهٔ ثابت

ب) جدولی با یک کنارهٔ ستونی ثابت د) جدولی با دو کنارهٔ ثابت

۱۸. تعداد طبقات، در یک آزمون نیکویی برازش، ۱۰ تاست که در آن μ_x و σ_x^2 برآورد شده‌اند. تعداد درجات آزادی این آزمون چقدر است؟

الف) ۷ ج) ۹

ب) ۸ د) ۱۰

۱۹. برای آزمون فرضیهٔ $H_0: p_1 = p_2$، مقدار آمارهٔ آزمون عبارت است از: $Z = -2/70$. مقدار χ_α^2 در آزمون همگونی کای ـ مربع چقدر است؟

الف) ۲/۷۰ ج) ۷/۲۹

ب) ۲/۷۰− د) ۱۰/۱٤

۲۰. ادعا شده که توزیع تصادفات در سطح شهر از توزیع پواسون برخوردار است. در آزمون این ادعا چند پارامتر برآورد خواهد شد؟

الف) ۳ ج) ۱

ب) ۲ د) صفر

مسائل

۲۱. فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «بین تحصیل و درآمد ارتباط وجود دارد.» برای بررسی این فرضیه یک نمونهٔ تصادفی به تعداد ۳۰۰ نفر انتخاب شده‌است. جدول زیر

نشان‌دهندهٔ اطلاعات به دست آمده از نمونه است:

درآمد (برحسب هزار تومان) \ سطوح تحصیل	بالا	متوسط	پایین
۳۰-۲۰	۵۰	۶۰	۹۰
۴۰-۳۰	۳۰	۲۰	۱۰
۴۰ و بالاتر	۳۰	۱۰	۰

آزمون مناسب را برای بررسی فرضیه فوق در سطح خطای ۲ درصد برگزار کنید.

۲۲. فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «نظرهای یکسانی در سطوح عملیاتی، میانی و عالی نسبت به برقراری سیستم اطلاعاتی مدیریت (MIS) وجود دارد.» برای بررسی این فرضیه از هر گروه یک نمونهٔ تصادفی انتخاب شده که کیفیت نظرهای آنها به تفکیک در جدول زیر آمده است:

سطح مدیریت \ کیفیت نظرها	موافق	غیرموافق
عملیاتی	۲۰۰	۵۰
میانی	۱۸۰	۲۰
عالی	۶۰	۱۰

آزمون مناسب را در سطح خطای ۵ درصد برای بررسی فرضیهٔ فوق برگزار کنید.

۲۳. از یک جامعهٔ روستایی ۵۰ نفر را به طور تصادفی انتخاب کرده‌اند که ۴۰ نفر آنها باسواد هستند. آیا می‌توان نسبت افراد باسواد را در روستا مساوی ۷۴ درصد دانست. آزمون مناسب کای ـ مربع را در سطح خطای یک درصد به برگزار کنید.

۲۴. فرض کنید ٤ سکه را ۱۶۰ مرتبه پرتاب کرده‌اند. در نتیجه اطلاعات زیر که بیان‌کنندهٔ تعداد خطها در ۱۶۰ پرتاب است به دست آمده‌است:

تعداد خط	۰	۱	۲	۳	٤
فراوانی	۱۷	۵۲	۵٤	۳۱	۶

آیا می‌توان در سطح اطمینان ۹۵ درصد ادعا کرد که دست کم یکی از سکه‌ها غیرهمطراز است؟

۲۵. ادعا شده است که عمر لامپهای تولیدی کارخانه از توزیع‌نمایی برخوردار است. بدین منظور

طول عمر یک نمونهٔ تصادفی ۵۰۰ تایی در جدول زیر طبقه‌بندی شده است:

حدود طبقات (برحسب هزار ساعت)	۰-۵	۵-۱۰	۱۰-۱۵	۱۵-۲۰	۲۰-۲۵
فراوانی	۱۸۰	۱۲۰	۱۰۰	۸۰	۲۰

آزمون مناسب را در سطح خطای یک درصد برگزار کنید.

۲٦. ادعا شده که نرخ شکست کامپیوترهای سایت دانشگاه در طول هفته از توزیع پواسون برخوردار است. بدین منظور نرخ شکست آنها در طول ٤۰ هفته به طور تصادفی شمارش شده‌است که حاصل آن در این جدول آمده است:

تعداد خرابی	۰	۱	۲	۳	٤
تعداد هفته	۸	۱۰	۱۲	٦	٤

صحت ادعای فوق را در سطح خطای ۲ درصد بررسی کنید.

۲۷. ادعا شده که دستمزد ماهانهٔ کارگران کارخانه از توزیع نرمال برخوردار است؛ یعنی میانگین آن ۲۵ هزار تومان و انحراف معیارش ۱۰ هزار تومان است. برای بررسی صحت این ادعا نمونه‌ای تصادفی مرکب از ۱۰۰ کارگر از سطح کارخانه انتخاب شده که میزان دستمزد ماهانهٔ آنها در این جدول خلاصه شده است:

میزان دستمزد (برحسب هزار تومان)	فراوانی
۱۰ و کمتر	۱۰
۱۰-۲۰	۳۰
۲۰-۳۰	٤۰
۳۰-٤۰	۱۵
٤۰ و بیشتر	۵

با توجه به داده‌های نمونه، آیا می‌توان ادعا را در سطح اطمینان ۹۹ درصد پذیرفت؟ آزمون مناسب را برگزار کنید.

۲۸. فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «بین نوع آزمون شخصیت و کیفیت کار کارمندان ارتباط وجود دارد.» برای بررسی فرضیه یک نمونهٔ تصادفی از بین کارمندان انتخاب شده که نتیجهٔ آن در جدول زیر آمده است:

کیفیت کار \ نوع آزمون شخصیت	الف	ب
بالا	۲۰	۳۰
متوسط	٤۰	۱۰
پایین	۲۵	۱۵

صحت فرضیه را با استفاده از داده‌های نمونه در سطح خطای ۲ درصد بررسی کنید.

۲۹. فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «دوره‌های آموزشی شبانه، روزانه و ضمن خدمت نقطه نظرهای یکسانی نسبت به کیفیت آموزشی رشتهٔ مدیریت دارند.» برای بررسی این فرضیه از هر گروه یک نمونهٔ تصادفی انتخاب شده و از آنها مصاحبه به عمل آمده است. حاصل مصاحبه بدین ترتیب است:

کیفیت آموزشی / دوره آموزشی	خوب	متوسط	ضعیف
شبانه	۳۰	۲۰	۱۰
روزانه	۱۰۰	۴۰	۳۰
ضمن خدمت	۵۰	۱۵	۵

صحت فرضیه را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

پاسخنامهٔ سؤالات

۱) غ	۲) ص	۳) ص	۴) ص
۵) غ	۶) غ	۷) ص	۸) غ
۹) ص	۱۰) ص	۱۱) د	۱۲) ج
۱۳) الف	۱۴) ب	۱۵) د	۱۶) ج
۱۷) ج	۱۸) الف	۱۹) ج	۲۰) ج

فصل شانزدهم

روشهای ناپارامتری

۱-۱۶ مقدمه

در فصلهای قبل عمدهٔ مباحث آزمون فرض استنباطهایی را دربارهٔ «پارامترهای» جامعه، همچون میانگین و نسبتها، داشتند. از این رو آزمونهایی را تدارک می‌دیدیم تا پارامترهای به دست آمده از نمونه‌ها را آزمون کنند. برای این آزمونها ناچار بودیم فرضهایی بکنیم. مثلاً فرض می‌کردیم توزیع جامعهٔ مورد نمونه گیری نرمال است یا نمونه‌های اخذ شده مستقل از هم هستند و یا واریانسهای دو جامعه برابرند. حال اگر این گونه فرضها جایز نباشد، استفاده از این روشها با اشکال مواجه می‌شود. آماردانها درصدد برآمدند تا روشهایی ایجاد کنند که استفادهٔ از آنها مشروط به فرض خاصی دربارهٔ توزیع جامعه نباشد، به اصطلاح برای «جامعه‌های آزاد ـ توزیع» نیز کاربرد داشته باشد. خوشبختانه روشهای متعددی ارائه شده‌است، ولی به جای اینکه به روشهای جامعه‌های آزاد ـ توزیع معروف باشند، تسامحاً به «روشهای ناپارامتری» معروف شده‌اند.

روشهای ناپارامتری نسبت به روشهای پارامتری محاسن و معایبی دارند. اولین حسن روشهای ناپارامتری این است که مستلزم فرض خاصی دربارهٔ شکل توزیع جامعه نیستند. دوم اینکه فهم و استفاده از آنها معمولاً ساده‌تر از روشهای پارامتری است. همچنین روشهای ناپارامتری دو عیب دارند: اول اینکه فقط از قسمتی از اطلاعات استفاده کرده و باعث اتلاف اطلاعات می‌شوند. دوم اینکه این روشها از کارآیی و برش کمتری نسبت به روشهای پارامتری برخوردارند. مثلاً فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی روشهای ناپارمتری ممکن است دو برابر روشهای پارامتری باشد. با توجه به مطالب فوق، در واقع ما در استفاده از روشهای پارامتری یا ناپارامتری

بده ـ بستان انجام می‌دهیم: چون در روشهای ناپارامتری کمتر فرض می‌کنیم در نتیجه قدری از دقت و اطلاعات خود را از دست می‌دهیم، ولی در عوض حوزهٔ کاربرد روش را گسترش می‌دهیم.

۱۶ـ۲ آزمون علامت

اولین روش ناپارامتری که معرفی خواهیم کرد «آزمون علامت» است. به خاطر آورید که آزمون t برای فرض $\mu=\mu_0$ بر این فرض مبتنی بود که نمونه از جامعه‌ای نرمال گرفته شده است. وقتی این فرض درست نباشد، یکی از روشهای آزمون فرض $\mu=\mu_0$ روش آزمون علامت است. آزمون علامت نیز خود به «آزمون علامت یک نمونه‌ای» و «آزمون علامت زوج نمونه‌ای» تفکیک می‌شود.

۱۶ـ۲ـ۱ آزمون علامت یک نمونه‌ای

این آزمون موقعی به کار می‌رود که می‌خواهیم از جامعهٔ متقارن پیوسته‌ای نمونه‌ای بگیریم به طوری که احتمال اینکه عددی کوچکتر از میانگین و یا بزرگتر از آن باشد $\frac{1}{2}$ است.[1] در این آزمون می‌خواهیم صحت فرض $\mu=\mu_0$، را که آن را فرض صفر می‌نامیم و μ میانگین نمونه است، با توجه به نمونه n تایی آزمون کنیم. روش بدین صورت است که هریک از مقادیر نمونه را از میانگین مورد ادعا، μ_0، کم می‌کنیم. اگر تفاضل مثبت بود علامت «+» و اگر منفی بود علامت «−» می‌نویسیم و اگر تفاضل صفر باشد، آن نمونه را حذف می‌کنیم. هر نمونه $\frac{1}{2}$ شانس دارد که به آن علامت + داده شود؛ بنابراین تعداد علامتهای مثبت توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و nP دارد که در آن $P=\frac{1}{2}$ است. اگر تعداد نمونه کم باشد، برای آزمون فرض به جدول احتمالهای تجمعی دو جمله‌ای (جدول ۷ پیوست) مراجعه می‌کنیم، ولی اگر n بزرگ باشد توزیع نرمال تقریب خوبی برای دو جمله‌ای است و به جدول Z پیوست (جدول ۲) مراجعه می‌کنیم.

مثال ۱۶ـ۱ ادعا می‌شود که درجهٔ اکتان نوعی بنزین کمتر از ۹۸/۵ است. با توجه

---

۱. اگر نتوان فرض کرد که جامعه متقارن است ابتدا باید فرض $Md=Md_0$ را آزمود که در آن Md میانهٔ نمونه است. در صورتی که فرض تأیید شود آزمون علامت اعمال می‌شود.

به نمونه ۱۵ تایی زیر آزمون کنید که آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان ادعای فوق را پذیرفت؟

۹۵/۳	۱۰۰/۳	۹۷/۴	۹۶/۸	۹۶/۰	۹۷/۳	۹۵/۲	۹۷/۵
	۹۴/۹	۹۸/۵	۹۸/۲	۹۷/۶	۹۶/۱	۹۹/۱	۹۳/۲

۱. فرضها: $H_0 : \mu \geq ۹۸/۵$

$H_1 : \mu < ۹۸/۵$

۲. آمارهٔ آزمون: $n = ۱۴$ و $\alpha = ۰/۰۵$ (چون یکی از نمونه‌ها به طور دقیق برابر ۹۸/۵ است، آن نمونه حذف می‌شود، بنابراین $n = ۱۴$ است). اگر هر عدد بزرگتر از ۹۸/۵ را با علامت «+» و هر عدد کوچکتر از آن را با علامت «−» نشان دهیم و اعداد مساوی ۹۸/۵ را حذف کنیم، خواهیم داشت:

−−−−−−+−−+−−−−

۳. مقدار بحرانی: $c_{۰/۰۵,۱۴,۰/۵} = ۳$، که در آن x تعداد علامتهای مثبت است. اگر x کوچکتر یا مساوی ۳ باشد فرض صفر رد می‌شود. مقدار $c_{۰/۰۵,۱۴,۰/۵} = ۳$ را از جدول ۷ پیوست به دست آورده‌ایم. طرز پیدا کردن عدد ۳ بدین صورت بوده است که با $n = ۱۴$ و $p = ۰/۵$ دنبال عددی برای c می‌گردیم که $P(X \leq c) = ۰/۰۵$؛ بنابراین نزدیکترین مقدار کوچکتر یا مساوی ۰/۰۵ مقدار ۰/۰۲۹ است که متناظر با $c = ۳$ است.

۴. تصمیم‌گیری: چون $x = ۲$ کوچکتر و مساوی $c_{۰/۰۵,۱۴,۰/۵} = ۳$ است، بنابراین در ناحیهٔ بحرانی قرار گرفته و فرض صفر رد می‌شود، از این رو نمی‌توان ادعا کرد که میانگین اکتان بنزین مورد نظر کمتر از ۹۸/۵ است.

گفتیم که برای نمونه‌های زیاد، یعنی وقتی np و nq هر دو بزرگتر از ۵ باشند، می‌توان به جای توزیع دو جمله‌ای از تقریب نرمال استفاده کرد. در این صورت آمارهٔ آزمون عبارت خواهد بود از:

$$Z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}, \quad p_0 = \frac{۱}{۲}$$

که تقریباً توزیع نرمال استاندارد دارد (x تعداد علامتهای + است).

مثال ۲ـ۱۶ـ۱ داده‌های زیر میزان بدهیهای جاری شرکتی (برحسب میلیون ریال) در انتهای ۴۰ ماه مختلف است که با توجه به ترازهای آزمایشی به دست آمده است:

۳۵	۴۰	۳۹	۴۶	۲۸	۴۵	۵۶	۳۶	۵۰	۳۹
۵۱	۲۷	۳۷	۵۲	۶۰	۳۵	۷۰	۴۲	۸۰	۳۱
۳۵	۳۷	۴۲	۳۰	۳۷	۴۲	۵۲	۶۱	۵۴	۶۱
۳۶	۳۴	۵۰	۴۵	۵۲	۶۰	۵۵	۳۹	۳۲	۴۲

بانک ادعا می‌کند که میانگین بدهیهای جاری شرکت بیش از ۳۸ میلیون ریال است. با آزمون علامت، صحت ادعای بانک را در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید.

۱. فرضها: $H_0: \mu \le ۳۸$

$H_1: \mu > ۳۸$

۲. آماره آزمون: تعداد علامتهای مثبت، مقادیر بزرگتر از ۳۸، برابر ۲۶ است؛ بنابراین:

$$Z = \frac{۲۶ - ۴۰\,(۰/۵)}{\sqrt{۴۰\,(۰/۵)\,(۰/۵)}} = ۱/۸۹$$

۳. مقدار بحرانی: داریم ۴۰ = n و ۰/۰۵ = α پس:

$$Z_{\alpha} = Z_{/۰۵} = ۱/۶۴۵$$

۴. تصمیم‌گیری: چون ۱/۸۹ = Z از ۱/۶۴۵ = $Z_{۰/۰۵}$ بیشتر است فرضیهٔ صفر مردود است؛ بنابراین می‌توان گفت که میانگین بدهیهای جاری شرکت بیشتر از ۳۸ میلیون ریال است.

۲ـ۲ـ۱۶ آزمون علامت زوج ـ نمونه‌ای

از آزمون علامت نیز می‌توان برای داده‌های زوجی استفاده کرد. در چنین مسائلی هر زوج را در نظر گرفته، اگر مقدار اولی بیشتر از دومی باشد علامت «+» و اگر کمتر باشد علامت «−» قرار می‌دهیم. اگر دو مقدار مساوی باشند آنها را کنار می‌گذاریم. سپس همانند آزمون علامت یک نمونه‌ای، اگر حجم نمونه کم باشد از جدول توزیع دو جمله‌ای (جدول احتمالهای تجمعی دو جمله‌ای پیوست) و اگر حجم نمونه زیاد باشد،

np و nq هر دو بزرگتر از ٥، از جدول توزیع نرمال استاندارد (جدول Z پیوست، جدول ۲) برای برگزاری آزمون استفاده می‌کنیم.

مثال ۳ـ۱٦ داده‌های زیر درجهٔ رضایت شغلی ۱۰ نفر از کارکنان سازمانی را قبل و بعد از یک سیستم مدیریتی جدید نشان می‌دهد. آیا در سطح معنی‌دار ٥ درصد می‌توان ادعا کرد که سیستم تشویقی مؤثر بوده است؟

قبل از سیستم مدیریتی جدید	٤٥	٦٨	٨٥	٥٩	٥٠	٧٣	٦٩	٧٤	٧١	٧٠
بعد از سیستم مدیریتی جدید	٤٥	٨٧	٦٩	٥٨	٦٤	٨٠	٧٥	٧٠	٦٨	٧٥

۱. فرضها: $H_۰: \mu_۱ \geq \mu_۲$

$H_۱: \mu_۱ < \mu_۲$

که $\mu_۱$ و $\mu_۲$ به ترتیب میانگین رضایت شغلی قبل و بعد از سیستم مدیریتی جدید است.

۲. آماره آزمون: تعداد علامتهای مثبت ٤ تاست، یعنی $x = ٤$.

$$- + + - - - - + + -$$

۳. مقدار بحرانی: داریم $n = ۹$ و $\alpha = ۰/۰۵$ پس:

$$c_{۰/۰۵,۹,۰/۵} = ۱$$

٤. تصمیم‌گیری: چون $x = ٤$ کمتر و یا مساوی $c_{۰/۰۵,۹,۰/۵} = ۱$ نمی‌باشد نمی‌توان فرض صفر را رد کرد؛ بنابراین سیستم مدیریتی جدید باعث افزایش رضایت شغلی نشده است.

مثال ٤ـ۱٦ این داده‌ها ارزیابی دو ارزیاب از میزان موفقیت ۲۰ کارمند شرکتی، در مقیاس ۱ تا ۳۰، است. در سطح معنی‌دار ٥ درصد با استفاده از آزمون علامت زوج ـ نمونه‌ای آزمون کنید که آیا تفاوتی بین ارزیابی دو ارزیاب وجود دارد یا نه؟

ارزیابی ارزیاب اول	٢٥	٢٤	٢٧	٢٨	٢١	٢٨	٢٠	١٥	٢٦	٢٣	١٧	٢٥	٣٠	٢٢	١٩	٢٠	١٧	١٩	٢٥	٢٨
ارزیابی ارزیاب دوم	٢٧	٢١	٢٢	٢٦	٢٣	٢٤	١٥	١٧	٢٦	٢١	٢٠	٢٢	٢٧	١٨	١٩	٢٣	١٥	١٢	٢٥	٢٣

۱. فرضها: $H_۰: \mu_۱ = \mu_۲$

$H_۱: \mu_۱ \neq \mu_۲$

۲. آماره آزمون: تعداد علامتهای مثبت، x، برابر ۱۲ است.

$$Z=\frac{۱۲-(۱۷)(۰/۵)}{\sqrt{(۱۷)(۰/۵)(۰/۵)}}=۱/۶۹۸$$

۳. مقادیر بحرانی: $Z_{\frac{\alpha}{۲}}=Z_{۰/۰۲۵}=\pm ۱/۹۶$

٤. تصمیم‌گیری: چون $Z=۱/۶۹۸$ بین ۱/۹۶ و ۱/۹۶- قرار دارد، نمی‌توان فرض صفر را رد کرد، بنابراین ارزیابی دو ارزیاب یکسان است.

تمرین

۱. قد یازده برادر و خواهر، برحسب سانتیمتر، به این صورت است:

قد برادر	۱۷۰/۵	۱۸۳/۱	۱۸۵/۲	۱۶۵/۲	۱۶۸/۰	۱۷۵/۳	۱۶۳/۲	۱۷۲/۰	۱۷٤/٤	۱۶۹/٤	۱۸۱/۶
قد خواهر	۱۵۵/۲	۱۷۷/۲	۱۸۰/۱	۱٤۵/۰	۱۶۲/۱	۱۷۰/۸	۱۶۰/۸	۱۷۳/۵	۱۷۱/۱	۱۶۱/۸	۱۶۵/۷

آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان گفت که میانگین قد فردی از خواهرش بزرگتر است؟

۲. می‌خواهیم ببینیم آیا زمان لازم برای اتوبوس شرکت واحد در طی مسیر خاصی کمتر از ۲۲ دقیقه است یا نه. بدین جهت زمان طی مسیر را در ۱٤ نوبت اندازه گرفتیم (اندازه‌ها برحسب دقیقه است):

۲۵ , ۲۷ , ۳۰ , ۲۱ , ۱۸ , ۱۳ , ۱۵ , ۳۱ , ۱۶ , ۱۸ , ۲۵ , ۲۱ , ۲۶ , ۲۲

در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون علامت را برگزار کنید.

۳. سازمان حسابرسی می‌خواهد میانگین زمان لازم برای حسابرسی به حسابهای بدهکاران و بستانکاران را با هم مقایسه کند. از این رو از ۲۵ گروه اعزامی خود به شرکتهای مختلف همگون خواسته است در پایان کار خود زمان لازم برای رسیدگی به این دو حساب را گزارش کنند. زمان لازم بر حسب نفر ـ ساعت به این صورت بوده است:

حسابهای بدهکاران	۱۲۵	۱۶۱	۱۳۰	۱۷۵	۱۹٤	۲۰۳	۱۸۰	۲۵٤	۸۵	۱۹۱	۲۳۲
حسابهای بستانکاران	۱٤۰	۱۷۶	۲۰۱	۱۸۱	۱۳۲	۲۰۱	۱۷۲	۲۸٤	۱۹۱	۱۶۵	۲۲۰

۱۲۲	۱۷۶	۱۵۵	۱۹۸	۲۰۹	۲۸۱	۲۱٤	۱۹۰	۱۷۶	۱۸۷	۱٤٤	۱۶۰	۱۵۲	۷۹
۱۱۰	۱۶٤	۱۵۹	۲۹۰	۱۸۸	۱۷۵	۱۶۵	۱٤۹	۱۹۸	۱۶۹	۱۶۵	۲۱۵	۱۱۰	۱۹۳

با استفاده از آزمون علامت تعیین کنید آیا در سطح معنی‌دار ۲ درصد می‌توان گفت که میانگین زمان لازم برای رسیدگی به این دو حساب برابر است؟

٤. شرکتی که به خارج از کشور زعفران صادر می‌کند می‌خواهد ببیند آیا وزن خالص هر بستهٔ زعفران صد گرم هست یا نه. بدین جهت وزن خالص ١٤ بسته را به این ترتیب یادداشت کرده است:

١٠٠/٨ ، ١٠٠/٠ ، ١٠٢/٦ ، ١٠٠/٣ ، ٩٨/٢ ، ١٠١/٠ ، ١٠٠/٥ ، ١٠٢/٥ ، ١٠٠/٠ ، ٩٧/١ ، ١٠٣/٦ ، ١٠٠/٩ ، ٩٩/٨ ، و ١٠١/٠

از آزمون علامت استفاده کرده، فرض $\mu = ١٠٠/٠$ را در مقابل $\mu \neq ١٠٠/٠$ در سطح معنی‌دار یک درصد آزمون کنید.

١٦ـ٣ آزمون رتبهٔ علامت‌دار

آزمون علامت که در قسمت قبل بحث شد ساده است، ولی چون مقادیر کمتر و یا بیشتر از μ_0 را با علامت «+» و «−» نشان داده و تنها از آنها در آزمون استفاده می‌کند باعث از دست دادن میزان قابل ملاحظه‌ای از اطلاعات می‌شود. دو مجموعه تفاضلهای زوجی را، که در شکل ١٦ـ١ به صورت نقطه در روی محور اعداد رسم شده، با هم مقایسه کنید. در هر دو حالت «الف و ب» ، $n = ٦$ است که تعداد علامتهای مثبت ٤ تاست، ولی حالت «ب» مبیّن انتقال بیشتر توزیع به سمت راست است، زیرا تفاضلهای مثبت بیش از تفاضلهای منفی از صفر دورند، اما در آزمون علامت فرقی بین این دو قائل نمی‌شود و به نتایج یکسانی برای هر دو منجر می‌شود.

ب   الف

شکل ١٦ـ١ دو نمودار از تفاضلهای زوجی با تعداد علامت + مساوی، ولی توزیعهای مختلف

کاری که «آزمون رتبهٔ علامت دار» می‌کند این است که وزنهای بیشتر را به علامتهایی می‌دهد که از صفر دورند. در آزمون رتبهٔ علامت‌دار، تفاضلهای زوجی برحسب قدر مطلق مقادیرشان مرتب می‌شوند. تفاضلهای صفر را باز هم کنار می‌گذاریم و اگر قدر مطلق دو یا چند تفاضل یکسان باشند به هریک از آنها میانگین رتبه‌هایی را که توأماً اشغال می‌کنند، تخصیص می‌دهیم. برای تشکیل آمارهٔ آزمون، T^+، رتبه‌های مربوط به مشاهدات مثبت را با هم جمع می‌کنیم.

برای مقادیر کوچک n ، آزمون فرض صفر چه برای آزمون یک نمونه‌ای و چه برای آزمون زوج ـ نمونه‌ای مبتنی بر جداول خاصی است (که با مراجعه به کتب

معرفی‌شده در انتهای کتاب می‌توانید به آنها دسترسی پیدا کنید)، ولی برای مقادیر بزرگ n، $n \geq ۱۵$، توزیع T^+ تقریباً نرمال است و برای انجام آزمون نیاز به امید ریاضی و واریانس آن داریم.

تحت فرض صفر، امید ریاضی و واریانس T^+ عبارت است از:

$$E(T^+) = \frac{n(n+۱)}{٤}$$

و:

$$V(T^+) = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲٤}$$

مثال ۵ـ۱٦ داده‌های زیر مربوط به وزن ۱۵ نفر قبل و بعد از رژیم غذایی خاصی است. با به کارگیری آزمون رتبهٔ علامت‌دار در سطح معنی‌دار ۵ درصد، آیا می‌توان گفت رژیم غذایی در کاهش وزن مؤثر بوده است؟

قبل از رژیم	۱۱۰/۱	۱۰۰/۱	۱۰۵/٤	۸۸/۱	۸۹/٦	۸۰/۱	۹۰/۵	۸۸/۱	۹۳/۰	۱۰٤/۸	۹۵/۰	۹۸/۳	۸٦/۳	۹۵/۲	۸۳/۱
بعد از رژیم	۱۲۱/۷	۹۹/۲	۱۰۰/۱	۷۸/۰	٦۹/۰	۷۳/۵	۸۹/۱	۸۰/۳	۹۱/۱	۱۰۵/۱	۸۹/۱	۹۱/٤	۹٤/۵	۸۸/٤	۷۸/۱

۱. فرضها: $H_۰: \mu_۱ \leq \mu_۲$

$H_۱: \mu_۱ > \mu_۲$

۲. آماره آزمون:

تفاضلهای زوجی	−۱۱/٦	۰/۹	۵/۳	۱۰/۱	۲۰/٦	٦/٦	۱/٤	۷/۸	۱/۹	−۰/۳	۵/۹	٦/۹	−۸/۲	٦/۸	۵/۰
مقادیر مطلق مرتب‌شده	۲۰/٦	۱۱/٦	۱۰/۱	۸/۲	۷/۸	٦/۹	٦/۸	٦/٦	۵/۹	۵/۳	۵/۰	۱/۹	۱/٤	۰/۹	۰/۳

رتبه‌ها	۱۵	۱٤	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	٦	۵	٤	۳	۲	۱
علامتها	+	−	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−

$T^+ =$ مجموع رتبه‌های تفاضلهای مثبت

$= ۲+۳+٤+۵+٦+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۳+۱۵$

$= ۹۳$

$$E(T^{+}) = \frac{(۱۵)(۱۵+۱)}{۴} = ۶۰$$

$$V(T^{+}) = \frac{(۱۵)(۱۵+۱)(۲\times۱۵+۱)}{۲۴} = ۳۱۰$$

$$Z = \frac{۹۳-۶۰}{\sqrt{۳۱۰}} = ۱/۸۷۴$$

۳. مقدار بحرانی: $Z_{۰/۰۵} = +۱/۹۶$

۴. تصمیم‌گیری: چون $Z = ۱/۸۷۴$ بیشتر از ۱/۶۴۵ است، بنابراین فرض صفر مردود است و می‌توان گفت رژیم غذایی در کاهش وزن افراد مؤثر بوده است.

گفتیم که اگر قدرمطلق دو یا چند تفاضل یکسان باشد به هریک از آنها میانگین رتبه‌هایی را که توأماً اشغال می‌کنند، تخصیص می‌دهیم. مثلاً فرض کنید قدر مطلق تفاضل سومین و چهارمین مشاهده برابر باشد، در این صورت رتبهٔ هریک از آنها با $\frac{۳+۴}{۲} = ۳/۵$ برابر است و یا اگر قدر مطلق تفاضل هشتمین، نهمین و دهمین مشاهده برابر باشد، آنگاه رتبهٔ هریک از آنها با $\frac{۸+۹+۱۰}{۳} = ۹$ برابر است. بقیه مراحل همانند مثال قبل خواهد بود.

مثال ۶-۱۶ ارزیابی دو ارزیاب، در مقیاس ۰ تا ۲۰، از عملکرد ۲۰ نفر از کارکنان سازمانی را انتخاب کرده‌ایم که به این صورت بوده است:

ارزیاب ۱	۱۸	۱۹	۱۳	۱۵	۱۴	۱۷	۱۸	۱۲	۱۴	۱۷	۱۳	۱۸	۱۶	۱۷	۱۵	۱۲	۱۱	۱۹	۱۵	۱۱
ارزیاب ۲	۱۳	۱۲	۱۱	۱۸	۱۰	۱۴	۱۵	۱۵	۱۲	۱۹	۱۳	۱۳	۱۶	۱۳	۱۷	۱۰	۱۱	۱۴	۱۲	۱۳

با استفاده از آزمون رتبهٔ علامت‌دار تعیین کنید که آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد میانگین ارزیابی این دو ارزیاب با هم متفاوت است یا نه؟

۱. فرضها: $H_۰: \mu_۱ = \mu_۲$

$H_۱: \mu_۱ \neq \mu_۲$

۲. آماره آزمون: $n = ۱۷$ (چون سه تا از ارزیابیها با هم مساوی بوده‌اند، حذف شده‌اند).

تفاضلهای زوجی	۵	۷	۲	−۳	۴	۳	۳	−۳	۲	−۲	۵	۴	−۲	۲	۵	۳	−۲
مقادیر مطلق مرتب شده	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۳	۳	۳	۳	۳	۴	۴	۵	۵	۵	۷

رتبه‌ها	۳/۵	۳/۵	۳/۵	۳/۵	۳/۵	۳/۵	۹	۹	۹	۹	۹	۱۲/۵	۱۲/۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۷
علامتها	+	+	−	−	+	−	−	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+

$$T^+ = ۳/۵+۳/۵+۳/۵+۹+۹+۹+۱۲/۵+۱۲/۵+۱۵+۱۵+۱۵+۱۷$$

$$= ۱۲۴/۵$$

$$E(T^+) = \frac{(۱۷)(۱۷+۱)}{۴} = ۷۶/۵$$

$$V(T^+) = \frac{(۱۷)(۱۷+۱)(۲\times۱۷+۱)}{۲۴} = ۴۴۶/۲۵$$

$$Z = \frac{۱۲۴/۵-۷۶/۵}{\sqrt{۴۴۶/۲۵}} = ۲/۲۷۲$$

۳. مقادیر بحرانی: $Z_{۰/۰۲۵} = \pm ۱/۹۶$

۴. تصمیم‌گیری: چون $Z = ۲/۲۷۲$ بین ۱/۹۶ و ۱/۹۶− قرار نمی‌گیرد، فرض صفر رد می‌شود؛ بنابراین ارزیابی این دو ارزیاب یکسان نیست.

تمرین

۱. می‌خواهیم دستگاهی صنعتی را طراحی کنیم که به استفاده از دو دست انسان نیاز دارد. بدین جهت لازم است قدرت دست راست و چپ را با هم مقایسه کنیم. داده‌های زیر قدرت دستهای ۲۰ نفر را نشان می‌دهد.

فرد	دست راست	دست چپ	فرد	دست راست	دست چپ
۱	۱۲۰	۹۵	۱۱	۱۵۲	۱۴۱
۲	۱۹۰	۱۶۱	۱۲	۱۷۵	۱۶۳
۳	۱۵۰	۱۳۰	۱۳	۱۶۰	۱۳۱
۴	۸۲	۸۰	۱۴	۱۲۲	۸۷
۵	۱۱۱	۱۱۱	۱۵	۸۵	۹۴
۶	۹۵	۸۸	۱۶	۸۷	۶۹
۷	۱۱۰	۱۱۷	۱۷	۹۰	۱۰۳
۸	۸۵	۹۰	۱۸	۱۱۷	۹۶
۹	۸۸	۶۴	۱۹	۹۲	۷۸
۱۰	۱۳۱	۱۴۲	۲۰	۱۱۸	۱۱۱

با استفاده از آزمون رتبهٔ علامت‌دار در سطح معنی‌دار ۵ درصد تعیین کنید که آیا قدرت دست راست بیشتر از دست چپ است؟

۲. یک دانشجوی حسابداری می‌خواهد تأثیر دو روش مختلف ارزیابی موجودیها، LIFO و FIFO، را در سود خالص شرکت بررسی کند. بدین جهت ۱۶ شرکت در صنعتی خاص را انتخاب و سود و زیان آنها را بر مبنای دو روش حساب کرده که بدین ترتیب است:

سود و زیان بر حسب ده هزار ریال					
شرکت	روش LIFO	روش FIFO	شرکت	روش LIFO	روش FIFO
۱	۴۰۸۰۱	۱۲۸۱۲	۹	۳۸۱۰۸	۴۸۲۱۱
۲	۵۷۱۲	−۴۳۱۵	۱۰	−۵۷۱۷	۵۲۱۱۳
۳	۷۳۸۱۵	۴۸۲۱۹	۱۱	−۱۸۴۱۲	−۲۰۱۲۱
۴	۳۲۴۱۸	−۱۲۵۱۴	۱۲	۴۹۱۰۰	۳۵۲۵۱
۵	۱۷۴۰۱	۹۰۴۱۸	۱۳	۸۲۱۸۸	۶۸۲۱۱
۶	۱۱۷۶۰۸	۸۷۲۱۷	۱۴	۳۵۲۶۸	۲۵۷۱۲
۷	۳۹۰۱۰	۳۵۱۱۱	۱۵	−۱۸۲۱۵	−۲۰۰۰۱
۸	۴۶۸۱۵	۷۵۶۱۲	۱۶	۴۸۷۱۵	۳۹۸۱۷

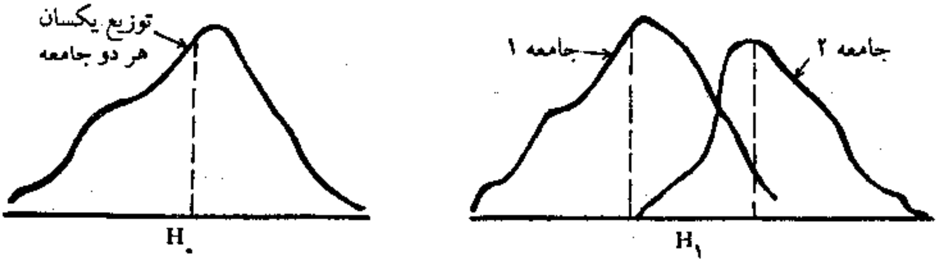
از آزمون رتبهٔ علامت‌دار استفاده کرده و در سطح معنی‌دار ۵ درصد فرض $\mu_1 \leq \mu_2$ را در مقابل فرض $\mu_1 > \mu_2$ آزمون کنید (μ_1 میانگین سود به روش LIFO است.)

۱۶-۴ آزمونهای مجموع رتبه‌ها

درآزمون مجموع رتبه‌ها می‌خواهیم ببینیم که آیا نمونه‌ها از جامعه‌های پیوستهٔ «یکسانی» هستند (میانگینهای یکسانی دارند) یا اینکه جامعه‌ها یکسان نیستند (میانگینهای متفاوتی دارند). شکل ۱۶-۲ را ملاحظه کنید که در آن فرض یکسان بودن جامعه‌ها را فرض صفر می‌نامیم. در اینجا مجبور نیستیم فرض کنیم که جامعه‌های مورد نمونه گیری توزیع نرمال دارند. اگر قضاوت دربارهٔ نمونه‌های گرفته شده از دو جامعه را بخواهیم مقایسه کنیم از «آزمون U» ، که گاهی آن را آزمون «ویلکاکسن»[1] و یا آزمون «من–ویتنی»[2] می‌نامیم، استفاده می‌کنیم؛ ولی اگر نمونه‌های گرفته شده از k جامعه

1. Wilcoxon
2. Mann-Whitney

باشد از «آزمون H»، که گاهی آن را آزمون «کروسکال – والیس»[1] می‌نامند بهره می‌بریم.



شکل ۲-۱۶ نمایش H_0 و H_1 دربارهٔ میانگین دو جامعه

۱-۴-۱۶ آزمونهای مجموع رتبه‌ها: آزمون U

در این روش می‌خواهیم فرض یکسانی دو جامعه را با توجه به نمونه‌های گرفته شده از دو جامعه آزمون کنیم. مراحل کار بدین صورت است که ابتدا تمام مقادیر نمونه را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم و سپس به آنها رتبه‌های ۱، ۲، ... می‌دهیم. سپس مجموع رتبه‌های هریک از دو نمونه را به دست آورده، آنها را با R_1 و R_2 نشان می‌دهیم. اگر اختلاف قابل توجهی بین میانگینهای دو جامعه موجود باشد، اغلب رتبه‌های پایین به احتمال زیاد مربوط به مقادیر یک نمونه و رتبه‌های بالا به احتمال زیاد مربوط به مقادیر نمونه دیگر خواهد بود. اگر تعداد نمونه‌های جامعه‌های اول و دوم را با n_1 و n_2 نشان دهیم در این صورت:

$$R_1 + R_2 = \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2}$$

خواهد بود (جمع جبری n عدد صحیح مثبت با شروع از یک برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$).
در عمل، معمولاً از آماره‌های u_1 و u_2 استفاده می‌کنیم که عبارتند از:

$$u_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

و:

$$u_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

و یا از آمارهٔ $\text{Min}\,(u_1, u_2)$ استفاده می‌کنیم. آزمونهای حاصل همه مبتنی بر R_1 و R_2

1. Kruskal-Wallis

هستند، ولی این مزیت را دارند که در تشکیل جدول مقادیر بحرانی انعطاف‌پذیری بیشتری از خود نشان می‌دهند.

برای مقادیر کوچک n_1 و n_2 آزمونهای مجموع رتبه‌ای تحت فرض صفر، یکسان بودن جامعه‌ها، مبتنی بر جداول خاصی هستند (که با مراجعه به کتب معرفی شده در انتهای کتاب می‌توانید به آنها دسترسی پیدا کنید)، ولی وقتی n_1 و n_2 هر دو بزرگتر از ۸ باشند توزیع u_1 (یا توزیع u_2) تقریباً نرمال است و برای انجام آزمون به امید ریاضی و واریانس u_1 (و یا u_2) نیاز داریم.

تحت فرض صفر، میانگینها و واریانسهای u_1 و u_2 عبارتند از:

$$E(u_1) = E(u_2) = \frac{n_1 n_2}{2}$$

$$V(u_1) = V(u_2) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

مثال ۱۶-۷ داده‌های زیر عمر دو نوع لامپ مهتابی است که به ساعت گرد شده‌اند:

نوع اول	۱۷۷۰۲	۱۶۸۷۳	۱۵۴۷۴	۱۹۶۴۷	۱۷۶۸۳	۱۵۸۴۷	۱۶۹۹۹	۱۶۶۷۸	۱۷۸۷۷	
نوع دوم	۱۶۷۰۱	۱۷۸۷۱	۱۶۷۴۸	۱۸۵۴۲	۱۴۳۴۵	۱۵۵۹۶	۱۶۸۷۹	۱۷۶۸۶	۱۷۴۱۱	۱۶۸۷۸

با استفاده از آزمون U تعیین کنید که آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان گفت که میانگین عمر لامپ نوع اول بیشتر از نوع دوم است؟

۱. فرضها: $H_0: \mu_1 \le \mu_2$

$H_1: \mu_1 > \mu_2$

۲. آماره آزمون: $n_1 = ۹$ و $n_2 = ۱۰$ است.

داده‌های مرتب‌شده	۱۴۳۴۵	۱۵۴۷۴	۱۵۵۹۶	۱۵۸۴۷	۱۶۶۷۸	۱۶۷۰۱	۱۶۷۴۸	۱۶۸۷۳	۱۶۸۷۸	۱۶۸۷۹	۱۶۹۹۹
نمونه	۲	۱	۲	۱	۱	۲	۲	۱	۲	۲	۱
رتبه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱

۱۷۴۱۱	۱۷۶۸۳	۱۷۶۸۶	۱۷۷۰۲	۱۷۸۷۱	۱۷۸۷۷	۱۸۵۴۲	۱۹۶۴۷
۲	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۱
۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹

بنابراین مجموع رتبهٔ نمونه اول $R_1 = ۲+٤+٥+۸+۱۱+۱۳+۱٥+۱۷+۱۹ = ۹٤$ است. پس

$$u_1 = ۹٤ - \frac{۹(۹+۱)}{۲} = ٤۹, E(u_1) = \frac{(۹)(۱۰)}{۲} = ٤٥, V(u_1) = \frac{(۹)(۱۰)(۹+۱۰+۱)}{۱۲} = ۱٥۰$$

$$Z = \frac{٤۹-٤٥}{\sqrt{۱٥۰}} = ۰/۳۳$$

۳. مقدار بحرانی: $Z_{۰/۰٥} = ۱/٦٤٥$.

٤. تصمیم‌گیری: چون $Z = ۰/۳۳$ از $Z_{۰/۰٥} = ۱/٦٤٥$ کمتر است نمی‌توان فرض صفر را مردود دانست؛ بنابراین میانگین عمر دو نوع لامپ مهتابی یکسان است.

۱٦-٤-۲ آزمونهای مجموع رتبه‌ها: آزمون H

همان طور که قبلاً گفتیم، آزمون H تعمیم آزمون U برای مقایسهٔ K جامعه است. به عبارت دیگر در این آزمون می‌خواهیم فرض برابری میانگینهای K جامعه را آزمون کنیم. این آزمون نیز بر مجموع رتبه‌های مشاهدات مبتنی است. این آزمون شبیه به تحلیل واریانس است با این تفاوت که نیازی به فرض نرمال بودن جامعه‌ها ندارد و به جای استفاده از خود داده‌ها از رتبهٔ آنها استفاده می‌کند.

روش بدین صورت است که ابتدا مجموع رتبه‌ها را برای نمونه i ام (R_i) پیدا می‌کنیم و سپس آمارهٔ H را که آزمون بر آن مبتنی است به این صورت حساب می‌کنیم:

$$H = \frac{۱۲}{n(n+۱)} \sum_{i=۱}^{k} \frac{R_i^۲}{n_i} - ۳(n+۱)$$

که k تعداد جامعه و $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ است.

اثبات می‌شود که آمارهٔ فوق دارای توزیع کای ـ مربع، χ^2، با $k-۱$ درجه آزادی است.

مثال ۱٦-۸ برای مقایسهٔ میزان فروش ماهانهٔ سه شعبهٔ یک شرکت زنجیره‌ای،

نمونه‌های تصادفی از فروشهای ماهانهٔ آنها گرفته شده و در این جدول آورده می‌شود:

فروش ماهانه برحسب میلیون ریال		
شعبهٔ اول	شعبهٔ دوم	شعبهٔ سوم
۸۰۱۰	٥٦۳۰	۹۸٤۰
۱۲٤۱۰	۷۸٤۰	٦۹٥۰
۱۰٤۹۰	٥۹۸۰	۷۸۱۰
۹٦۱۰		٦٤۳۰

با استفاده از آزمون H، در سطح معنی‌دار ٥ درصد بررسی کنید که آیا میانگین فروش سه شعبه با هم برابر است؟

۱. فرضها: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

دست کم دو میانگین با هم برابر نیستند : H_1

۲. آماره آزمون: با رتبه‌بندی مشاهدات از ۱ تا ۱۱ این جدول به دست می‌آید:

جدول رتبه‌بندی		
شعبهٔ اول	شعبهٔ دوم	شعبهٔ سوم
۷	۱	۹
۱۱	٦	٤
۱۰	۲	٥
۸		۳
$R_1 = ۳٦$	$R_2 = ۹$	$R_3 = ۲۱$

پس:

$$H = \frac{۱۲}{۱۱(۱۱+۱)}\left(\frac{۳٦^۲}{٤} + \frac{۹^۲}{۳} + \frac{۲۱^۲}{٤}\right) - ۳(۱۱+۱)$$

$$= ٥/۹۳۲$$

۳. مقدار بحرانی: داریم $k = ۳$، و $\alpha = ۰/۰٥$ بنابراین:

$$\chi^2_{\alpha, k-1} = \chi^2_{۰/۰٥, ۲} = ٥/۹۹۱$$

٤. تصمیم‌گیری: چون $H = ٥/۹۳۲$ بیشتر از $\chi^2_{۰/۰٥, ۲} = ٥/۹۹۱$ نیست نمی‌توان فرض صفر را مردود دانست، بنابراین می‌پذیریم که میانگینهای فروش سه شعبه برابرند.

تمرین

۱. برای فرض یکسان بودن سن کارمندان مرد و زن شرکتی در مقابل مسن‌تر بودن کارمندان مرد، آزمون فرضی را در سطح معنی‌دار یک درصد با توجه به این داده‌ها، با استفاده از آزمون U برگزار کنید.

سن مردان	۳۱	۴۴	۲۵	۳۰	۷۰	۶۳	۵۴	۴۲	۳۶	۲۲	۲۵	۵۰	۴۹	۵۸
سن زنان	۳۸	۳۴	۳۵	۴۷	۵۸	۸۳	۱۸	۳۶	۴۱	۳۷	۲۴	۴۸		

۲. پلیس مرکزی شهری می‌خواهد تعداد پلیسهای موجود خود را بین دو محله تقسیم کند. بدین منظور به سوابق جرمها در این دو محله رجوع می‌کند. فاصله زمانی بین دو جرم متوالی (برحسب ساعت) به صورت زیر بوده است:

محلهٔ اول	۱۷	۱۴	۹	۱۰	۱۵	۲۰	۱۵	۱۶	۱۸	۱۶	۹	۱۳	۱۷	۷
محلهٔ دوم	۱۳	۸	۹	۶	۱۱	۱۴	۱۳	۱۸	۲۴	۳۰	۱۶	۱۱	۶	۱۰

با استفاده از آزمون U در سطح معنی‌دار یک درصد تعیین کنید آیا فاصلهٔ زمانی بین دو جرم متوالی محلهٔ اول بیشتر از محلهٔ دوم است؟

۳. نوعی داروی جدید بیهوشی در سه دوزِ ۰/۵ ، ۱/۰ ، و ۱/۵ میلی‌گرمی به نوع بخصوصی موش تزریق شده و مدت بیهوشی هریک از آنها (برحسب دقیقه) ثبت شده است.

دوز ۰/۵ میلی‌گرم	۸/۲	۱۰/۰	۱۰/۲	۱۳/۷	۱۴/۰	۷/۸	۱۲/۷	۱۰/۹		
دوز ۱/۰ میلی‌گرم	۹/۷	۱۳/۱	۱۱/۰	۷/۵	۱۳/۳	۱۲/۵	۸/۸	۱۲/۹	۷/۹	۱۰/۵
دوز ۱/۵ میلی‌گرم	۱۲/۰	۷/۲	۸/۰	۹/۴	۱۱/۳	۹/۰	۱۱/۵	۸/۵		

با استفاده از آزمون H در سطح معنی‌دار یک درصد این فرض را آزمون کنید که تجویز دوزهای مختلف تأثیری روی مدت بیهوشی ندارد.

۴. اگر $E(u_1)$ = ۱۶۲۴ ، $V(u_1)$ = ۱۷۶/۴۲۷۵ و R_1 = ۳۲۵۵ باشد، با توجه به اینکه حجم نمونه دوم دو برابر نمونه اول بوده‌است، در سطح معنی‌دار ۵ درصد، با محاسبهٔ مقدار Z ، آیا فرض تساوی دو میانگین را معقول می‌دانید؟

۱۶ـ۵ آزمون مبتنی بر ردیفها (آزمون استقلال)

یکی از فرضیه‌های مهمی که در طول این کتاب انجام می‌دادیم، که حتی مهمتر از توزیع نرمال نیز بوده، فرض تصادفی بودن نمونه است. آزمونهای مختلفی برای آزمون

تصادفی بودن نمونه وجود دارد که یکی از آنها براساس نظریهٔ ردیفهاست که در آن یک «ردیف» عبارت است از توالی حروف واحد (یا هر علامت دیگری) که قبل و بعد از آنها ممکن است حروف دیگری قرار گرفته باشد و یا اصلاً چیزی نباشد. مثلاً می‌خواهیم ببینیم که ترتیب کاشت درختان سرو و کاج در خیابانی تصادفی است یا نه. بدین جهت درختان قسمتی از خیابان را به ترتیب یادداشت کرده‌ایم که به این صورت (حرف «ک» برای کاج و «س» برای سرو) است:

س س ک س ک ک ک ک س ک ک س س س ک ک س س س س س س ک س.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱

با استفاده از آکولاد برای تلفیق حروفی که تشکیل یک ردیف را می‌دهند، معلوم می‌شود که در توالی فوق ۱۱ ردیف وجود دارد. اگر کاشت درختان سرو و کاج مستقل (تصادفی) باشند، آنگاه ترتیب مشاهدات نباید تشکیل روندی را بدهد و همچنین نباید تشکیل خوشه و گروه بدهد. همچنین اگر تعداد ردیفها خیلی زیاد باشد ممکن است به یک نوع الگوی تناوبی مشکوک شویم. در مثال فوق ظاهراً نوعی الگوی خوشه‌ای در کشت درختان سرو و کاج وجود دارد که برای نتیجه گیری قطعی باید از آزمون فرض کمک بگیریم.

اگر تعداد حروف نوع اول و دوم را به ترتیب با n_1 و n_2 و تعداد ردیفها را با R نشان دهیم، وقتی n_1 و n_2 کوچک باشند، فرض صفر (تصادفی بودن ترتیب حروف) مبتنی بر جداول خاصی است که می‌توان با مراجعه به کتب معرفی شده در انتهای کتاب به آنها دسترسی پیدا کرد. اگر $n_1 \geq 10$ و $n_2 \geq 10$ باشد، می‌توان از تقریب نرمال استفاده کرد. تحت فرض صفر (تصادفی بودن نمونه)، امید ریاضی و واریانس R عبارتند از:

$$E(R) = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

و:

$$V(R) = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}$$

مثال ۹-۱۶ با مراجعه به مثال بالا فرض تصادفی بودن ترتیب درختان سرو و کاج را در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید.

۱. فرضها: آرایش تصادفی است: H_0
آرایش تصادفی نیست: H_1
۲. آماره آزمون: $n_1 = ۱۴$، $n_2 = ۱۰$، و $r = ۱۱$ پس:

$$E(R) = \frac{۲\times۱۴\times۱۰}{۱۴+۱۰} + ۱ = ۱۲/۶۷$$

$$V(R) = \frac{۲\times۱۴\times۱۰(۲\times۱۴\times۱۰-۱۴-۱۰)}{(۱۴+۱۰)^۲(۱۴+۱۰-۱)} = ۵/۴۱$$

$$Z = \frac{۱۱-۱۲/۶۷}{\sqrt{۵/۴۱}} = -۰/۷۲$$

۳. مقادیر بحرانی: $Z_{\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۰۲۵} = \pm ۱/۹۶$

۴. تصمیم‌گیری: چون $Z = -۰/۷۲$ بین ۱/۹۶ و ۱/۹۶− قرار می‌گیرد نمی‌توان فرض تصادفی بودن کشت درختان سرو و کاج را مردود دانست.

روشی که در بالا مطرح شد به تصادفی بودن رشته‌ای از حروف (یا هر علامت دیگری) منحصر نیست و می‌توان آن را به نمونه‌های عددی نیز تعمیم داد. در این صورت می‌توان از حروفی، مثلاً «a» برای بالا و «b» برای پایینِ مقداری همچون میانه به‌کار برد (اعدادی هم که برابر میانه باشند حذف می‌شوند) و سپس توالی حروف ایجاد شده را برپایهٔ تعداد کل ردیفها آزمود و نسبت به تصادفی (مستقل) بودن مقادیر عددی در «بالا و پایین میانه» قضاوت کرد.

مثال ۱۰-۱۶ فرض کنید اعداد زیر مُعرّف قیمت نوعی سهام (برحسب ده هزار ریال) در بازار سهام در ۴۰ روز متوالی باشد. آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان به تصادفی بودن قیمتهای هر روز قائل شد؟

۵۴ , ۵۳ , ۵۲ , ۵۴ , ۵۳ , ۵۳ , ۵۳ , ۵۱ , ۵۲ , ۵۵ , ۵۴ , ۵۶ , ۵۴ , ۵۵ , ۵۶ , ۵۵ , ۵۳ , ۵۵ , ۵۴ , ۵۴
۵۵ , ۵۷ , ۵۶ , ۵۶ , ۵۶ , ۵۵ , ۵۴ , ۵۴ , ۵۴ , ۵۵ , ۵۶ , ۵۶ , ۵۷ , ۵۷ , ۵۸ , ۶۱ , ۵۹ , ۵۸ , ۵۶ , ۵۶

میانهٔ اعداد فوق ۵۵ است. اگر a را برای اعداد بزرگتر از ۵۵ و b را برای اعداد کوچکتر از ۵۵ در نظر بگیریم و اعداد برابر ۵۵ را حذف کنیم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{bbbbbbbbbb}_{۱}\ \underbrace{a}_{۲}\ \underbrace{b}_{۳}\ \underbrace{a}_{٤}\ \underbrace{bbb}_{۵}\ \underbrace{aaaa}_{٦}\ \underbrace{bbb}_{۷}\ \underbrace{aaaaaaaaaa}_{۸}$$

۱. فرضها: قیمت هر روز سهام تصادفی است: $H_{۰}$

قیمت هر روز سهام تصادفی نیست: $H_{۱}$

۲. آماره آزمون: $n_{۱} = ۱٦$ ، $n_{۲} = ۱۷$ ، و $r = ۸$ پس:

$$E(R) = \frac{۲ \times ۱٦ \times ۱۷}{۱٦ + ۱۷} + ۱ = ۱۷/٤۸$$

$$V(R) = \frac{۲ \times ۱٦ \times ۱۷(۲ \times ۱٦ \times ۱۷ - ۱٦ - ۱۷)}{(۱٦ + ۱۷)^{۲}(۱٦ + ۱۷ - ۱)} = ۷/۹۸$$

$$Z = \frac{۸ - ۱۷/٤۸}{\sqrt{۷/۹۸}} = -۳/۳۵$$

۳. مقادیر بحرانی: $Z_{\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۰۲۵} = \pm ۱/۹٦$

٤. تصمیم‌گیری: چون $Z = -۳/۳۵$ در خارج از ۱/۹٦ و ۱/۹٦- قرار می‌گیرد، می‌توان فرض تصادفی بودن مقادیر فوق را مردود دانست.

تمرین

۱. در سطح معنی‌دار ۵ درصد تصادفی بودن این نمونه را آزمون کنید.

a b a a a b b a b b a a b a b a a b b b b a b b a a a b a b a a b b a b b a a a b b a a b a a a.

۲. ۳۰ عدد تصادفی تولید شده را به وسیلهٔ یک مولد اعداد تصادفی جهت تصادفی بودن اعداد تولید شده یادداشت کرده‌ایم. در سطح معنی‌دار ۱۰ درصد آیا تصادفی بودن نمونه زیر را می‌پذیرید؟

۰/۳۸ , ۰/٤۸ , ۰/۷۸ , ۰/٦٤ , ۰/۰۱ , ۰/۲۹ , ۰/۳٦ , ۰/٤۷ , ۰/۳۲ , ۰/۸۷ , ۰/٤٦ , ۰/۹۹

۰/۸۳ , ۰/٤۱ , ۰/۷۰ , ۰/۵۹ , ۰/٦۸ , ۰/۱۸ , ۰/۳۷ , ۰/٦٤ , ۰/٤۵ , ۰/۳۱ , ۰/۸۰ , ۰/۷۳

۰/٦۸ , ۰/۸۲ , ۰/۲۲ , ۰/٤۸ , ۰/۳۱ , ۰/۸۹.

۳. در قسمت تراشکاری شرکتی ٦ دستگاه تراش است که ۳ عدد از آنها قدیمی‌ترند. یکی از مشکلات مسئول قسمت تراشکاری این شرکت آن است که به دلیل خرابی مکرر دستگاههای تراش، براحتی نمی‌تواند کالاهای سفارشی را در موعد مقرر آماده سازد. وی حدس می‌زند که خرابیهای ماشینهای قدیمی بیشتر است. با توجه به اینکه در پایان هر هفته تمام ماشینها تعمیر می‌شوند؛ او برای آزمون حدسش، خرابی ماشینها را در خلال چند هفته به این ترتیب یادداشت کرده است (ماشینهای شمارهٔ ۱ ، ۲ و ۳ قدیمی‌ترند):

١, ٢, ٣, ١, ٤, ٥, ٣, ١, ٢, ٥, ١, ٣, ٦, ٢, ٣, ٦, ٢, ٢, ٣, ٥, ٤, ٦, ٤, ٢,
١, ٣, ٤, ٥, ٥, ١, ٤, ٥, ٢, ٣, ٥, ٦, ٤, ٣, ٢, ٥, ٤, ٣

الف) آیا در سطح معنی‌دار ٥ درصد می‌توان گفت که خرابی ماشینها تصادفی است؟

ب) آیا شما به مسئول قسمت تراشکاری توصیه می‌کنید که سعی کند در ابتدای هفته بیشتر از ماشینهای جدیدتر استفاده کند و در انتهای هفته از ماشینهای قدیمی‌تر؟

٤. استادی علاقه‌مند است بداند که آیا دانشجویان ممتاز کلاسش تمایل دارند که برگهٔ امتحان خود را زودتر از بقیه کلاس تحویل دهند (چون مطالب را می‌توانند راحت به یاد بیاورند) یا دیرتر (چون وقت بیشتری برای نوشتن تمام چیزهایی که می‌دانند، لازم است). برای همین منظور ترتیب تحویل برگهٔ امتحان و نمره‌های دانشجویان خود را بدین صورت یادداشت کرده است:

ترتیب	نمره									
١-١٠	٩٤	٧٠	٨٥	٨٩	٩٢	٩٨	٦٣	٨٨	٧٤	٨٥
١١-٢٠	٦٩	٩٠	٥٧	٨٦	٧٩	٧٢	٨٠	٩٣	٦٦	٧٤
٢١-٣٠	٥٠	٥٥	٤٧	٥٩	٦٨	٦٣	٨٩	٥١	٩٠	٨٨

الف) اگر استاد دانشجویانی را که نمرهٔ ۹۰ و بالاتر می‌گیرند، دانشجوی ممتاز تلقی کند، آیا در سطح معنی‌دار ٥ درصد می‌توان ادعا کرد که ترتیب تحویل برگه‌ها تصادفی است؟

ب) با توجه به این مسأله که فقط دانشجویانی که نمرهٔ ٦٠ و بالاتر بگیرند در این درس قبول می‌شوند؛ آیا ترتیب تحویل برگه‌های دانشجویانی که در این درس قبول می‌شوند و آنهایی که قبول نمی‌شوند (در سطح ٥ درصد) تصادفی است؟

٥. ترتیب مراجعهٔ ٤٠ مشتری، برحسب جنسیت، به بانک در چهارشنبهٔ گذشته به این صورت بوده است (حرف م یعنی مرد و ز، زن):

م ز م م م م ز ز م م م ز م م م م م ز ز م ز م م م ز م م م م م م ز م م م م م ز ز م.

در سطح معنی‌دار ٥ درصد آزمون کنید که آیا توالی ورود مرد و زن تصادفی است؟

۱۶ـ۶ ضریب همبستگی رتبه‌ای

چون آزمون معنی‌دار بودن r در فصل چهاردهم مبتنی بر فرضیه‌های دست و پاگیری است، بعضی اوقات روشهای ناپارامتریک را که مبتنی بر شرایط معمولی‌تر هستند به جای آن به کار می‌بریم. فرض صفر در این آزمون فرض می‌کند که همبستگی وجود ندارد. ضریب همبستگی رتبه‌ای را با r_s نشان می‌دهیم. گاهی ضریب همبستگی رتبه‌ای، به افتخار مبتکر آن، «ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن[1]» خوانده می‌شود.

طرز محاسبهٔ ضریب همبستگی رتبه‌ای برای داده‌های زوجی (x_i, y_i) برای $i = 1, 2, ..., k$ بدین صورت است: ابتدا به تمام xها بر حسب مقادیرشان رتبه می‌دهیم و همین کار را نیز برای y ها انجام می‌دهیم، سپس تفاضل بین رتبه‌های هر زوج را که با d_i نشان می‌دهیم حساب می‌کنیم. در مرحله بعد توان دوم d ها را محاسبه کرده، در نهایت با استفاده از این فرمول ضریب همبستگی رتبه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{k} d_i}{n(n^2-1)}$$

مثال ۱۱ـ۱۶ داده‌های زیر مربوط به ضریب هوشی (IQ) ۱۳ زوج جوان است. ضریب همبستگی رتبه‌ای را برای آن حساب کنید.

زوج	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
IQ شوهر	۹۵	۱۲٥	۸۳	۸٦	۱۰۰	۷٥	۹۹	۹٥	۱۱٥	۸۸	۹۱	۸٤	۱۰٤
IQ زن	۸۳	۱۰۷	۷۸	۹٤	۱۰٦	۷۰	۸٥	۱۰۱	۱۰٦	۸۰	۱۰۰	۸۲	۱۰٦

ابتدا xها و y ها را رتبه‌بندی کرده، سپس تفاضل آنها و توان دوم تفاضل را حساب می‌کنیم.

زوج	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
رتبهٔ x	۷/٥	۱۳	۲	٤	۱۰	۱	۹	۷/٥	۱۲	٥	٦	۳	۱۱
رتبهٔ y	٥	۱۳	۲	۷	۱۰	۱	٦	۸	۱۰	۳	۱۲	٤	۱۰
d	۲/٥	۰	۰	−۳	۰	۰	۳	−۰/٥	۲	۲	−٦	−۱	۱
d^2	٦/۲٥	۰	۰	۹	۰	۰	۹	۰/۲٥	٤	٤	۳٦	۱	۱

1. Spearman

و $\Sigma d^2 = ۷۰/۵۰$. بنابراین:

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 70/50}{13(13^2-1)} = 0/81$$

اگر ضریب همبستگی (r) را برای این مثال حساب کنیم مقدار $r = ۰/۷۸$ به دست می‌آید که به ضریب همبستگی رتبه‌ای $r_s = ۰/۸۱$ بسیار نزدیک است. به دلیل سادگی گاهی از r_s به جای r استفاده می‌شود.

برای آزمون فرض صفر، فرضی که مدعی است متغیرهای x و y همبستگی با هم نداشته و به صورت تصادفی این زوجها جور شده‌اند، نیازی به فرض خاصی در مورد جامعهٔ مورد نمونه گیری نیست. برای مقادیر کوچک n، $n \le ۱۰$، آزمون مبتنی بر جدول ۶ پیوست قرار دارد که از توزیع دقیق نمونه گیری r_s تعیین می‌شوند. برای مقادیر بزرگ، $n > ۱۰$، توزیع r_s را می‌توان با توزیع نرمال تقریب زد که در این صورت به امید ریاضی و واریانس آن نیاز داریم. پس تحت فرض صفر، امید ریاضی و واریانس r_s عبارتند از:

$$E(r_s) = 0$$

و:

$$V(r_s) = \frac{1}{n-1}$$

مثال ۱۲-۱۶ ضریب همبستگی رتبه‌ای را برای داده‌های زیر حساب کرده، آزمون کنید که آیا در سطح معنی‌دار ۱۰ درصد می‌توان ادعا کرد که بین دو متغیر x و y همبستگی وجود ندارد؟

x	−۵	−۷	۱۱	۶	۵
y	۸	۳	۱	۴	۵

۱. فرضها: $H_0: \rho = 0$

$H_1: \rho \ne 0$

۲. آماره آزمون: ابتدا ضریب همبستگی را حساب می‌کنیم.

زوج	رتبهٔ x	رتبهٔ y	d	$d^۲$
۱	۲	۵	۳−	۹
۲	۱	۲	۱−	۱
۳	۵	۱	٤	۱٦
٤	٤	۳	۱	۱
۵	۳	٤	۱−	۱
				$\Sigma d^۲ = ۲۸$

بنابراین:

$$r_s = ۱ - \frac{٦ \times ۲۸}{۵(۵^۲ - ۱)} = -۰/٤۰$$

۳. مقادیر بحرانی: $r_{s,۰/۰۵,۵} = \pm ۰/۹۰۰$ مقدار $r_{s,۰/۰۵,۵} = \pm ۰/۹۰۰$ بدین صورت از جدول شمارهٔ ٦ پیوست به دست می‌آید: چون آزمون دو طرفه است $\frac{\alpha}{۲} = ۰/۰۵$ می‌شود که با $n = ۵$ مقدار جدول ۰/۹۰۰ خواهد بود.

٤. تصمیم‌گیری: چون $r_s = -۰/٤۰$ بین ۰/۹۰۰ و ۰/۹۰۰− قرار می‌گیرد، فرض صفر را نمی‌توان مردود دانست. نتیجه اینکه همبستگی معنی‌داری در سطح معنی‌دار ۱۰ درصد بین دو متغیر x و y وجود ندارد.

مثال ۱۳-۱٦ با مراجعه به مثال ۱۱-۱٦، آیا می‌توان در سطح معنی‌دار ۵ درصد ادعا کرد که همبستگی مثبتی بین ضریب هوشی (IQ) شوهران و زنان وجود دارد؟

۱. فرضها: $H_۰ : \rho \leq ۰$

$H_۱ : \rho > ۰$

۲. آماره آزمون:

$$V(r_s) = \frac{۱}{۱۳ - ۱} = ۰/۰۸۳$$

$$Z = \frac{۰/۸۱ - ۰}{\sqrt{۰/۰۸۳}} = ۲/۸۱$$

۳. مقدار بحرانی: چون $n > 10$ است توزیع تقریباً نرمال است، بنابراین:

$$Z_{\alpha} = Z_{0/05} = 1/645$$

۴. تصمیم‌گیری: چون $Z = 2/81$ بیشتر از $Z_{0/05} = 1/645$ است پس فرض صفر رد می‌شود؛ بنابراین می‌توان ادعا کرد که همبستگی مثبتی بین ضریب هوشی شوهران و همسرانشان وجود دارد.

حُسن بزرگ ضریب همبستگی رتبه‌ای (r_s) نسبت به ضریب همبستگی (r)، علاوه بر ساده‌بودنش، در این است که چون r_s صرفاً بر مبنای رتبه‌ها عمل می‌کند اگر یک یا چند داده نسبت به داده‌های دیگر خیلی افراطی باشد، آن را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد ولی در ضریب همبستگی (r) افراطی بودن یک یا چند داده تأثیر زیادی در آن می‌گذارد، زیرا با مقدار داده‌ها کار می‌کند نه با رتبهٔ آنها. برای نمونه در داده‌های ذیل:

x	۸	۱۱	۱۳	۱۴	۱۸	۲۱
y	۴۰	۵۲	۵۰	۵۹	۶۰	۱۷۵

مقدار ۱۷۵ نسبت به بقیه y ها افراطی است و باعث تأثیر زیادی در r خواهد شد، ولی رتبهٔ آن تنها ۶ می‌شود و حساسیت زیادی در r_s را موجب نمی‌شود.

تمرین

۱. این داده‌ها مربوط به مقدار اضافه کاری و سنوات خدمت ۸ کارمند است. ضریب همبستگی رتبه‌ای را حساب کنید.

مقدار اضافه کاری	۵/۰	۸/۰	۲/۰	۴/۰	۳/۰	۷/۰	۱/۰	۶/۰
سنوات خدمت	۱/۰	۶/۰	۴/۵	۲/۰	۷/۰	۸/۰	۴/۵	۳/۰

۲. آیا ضریب همبستگی رتبه‌ای تمرین ۱ در سطح یک درصد معنی‌دار است؟

۳. اگر نمونه‌ای زوجی به اندازهٔ $n = 8$ منتهی به $r_s = 0/48$ شود، آیا می‌توان ادعا کرد که در سطح معنی‌دار ۰/۱۰ بین دو متغیر همبستگی وجود ندارد؟

۴. مدیر شرکت تازه تأسیسی برای استخدام کارکنان قسمت فروش از دو مصاحبه کننده، که قبلاً برای این کار آموزش دیده‌اند، خواسته است که به طور مجزا تواناییهای فروش متقاضیان را ارزیابی و به آنها امتیاز دهند. امتیازاتی که این دو به ۱۴ نفر داده‌اند بدین صورت است:

متقاضی	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱٤
مصاحبه کنندهٔ اول	۱	۱۱	۱۳	۲	۱۲	۱۰	۳	٤	۱٤	٥	٦	۹	۷	۸
مصاحبه کنندهٔ دوم	٤	۱۲	۱۱	۲	۱٤	۱۰	۱	۳	۱۳	۸	٦	۷	۹	٥

پس از محاسبهٔ r_s، آیا در سطح معنی‌دار ۲ درصد می‌توان گفت که:

الف) همبستگی مثبتی بین ارزیابی دو مصاحبه کننده وجود دارد؟

ب) ضریب همبستگی بین ارزیابی این دو بیش از ۰/۸۵ است؟

۵. سازمان کار و امور اجتماعی در حال بررسی ارتباط بین هزینه‌هایی که شرکتها برای ایمنی کارگران خود صرف می‌کنند و میزان سوانحی که به وجود می‌آید، است. بدین منظور صنعت نساجی را انتخاب و داده‌های مربوط به هزینه‌های ایمنی به ازای هر نفر کارگر و میزان سوانح را برای ۱۱ شرکت جمع‌آوری کرده است که بدین قرارند:

هزینه به ازای هر کارگر	٤۸۰۰۰	۳۲٦۰۰	٤۳۰۰۰	۳۹۰۰۰	٥۲۰۰۰	٦۸٤۰۰	٥۲۳۰۰	٦۹۲۰۰	۸٤۳۰۰	٥٦۲۰۰	۲٤۷۰۰
میزان سوانح	٤/۳	۳/۷	٦/۳	۲/۰	۲/۲	۱/٥	۲/٥	۱/۱	۱/۸	۲/٥	۳/۰

ضریب همبستگی رتبه‌ای را حساب کرده، در سطح معنی‌دار ٥ درصد قضاوت کنید که آیا همبستگی منفی‌ای بین هزینه‌های ایمنی و میزان سوانح وجود دارد؟

۱۹-۷ آزمون کولموگوروف ـ اسمیرنوف

آزمون کولموگوروف ـ اسمیرنوف، که به افتخار دو آماردان روسی به نامهای اِ. ن. کولموگوروف[1] و ن. و. اسمیرنوف[2] به این نام خوانده می‌شود، روش ناپارامتری ساده‌ای برای تعیین همگونی اطلاعات تجربی با توزیعهای آماری منتخب است؛ بنابراین آزمون کولموگوروف ـ اسمیرنوف، که از این به بعد آن را با KS نشان می‌دهیم، روش دیگری علاوه بر روش کای مربع (χ^2) برای همگونی یک توزیع فراوانی نظری برای اطلاعات تجربی است.

در اینجا بد نیست مزایای هریک از دو آزمون χ^2 و KS را بر دیگری برشماریم: یکی از مزایای آزمون KS این است که هریک از مشاهدات را به صورت اصلی درنظر می‌گیرد در حالی که آزمون χ^2 به طبقه‌بندی مشاهدات پرداخته و بدین جهت مقداری از اطلاعات را از دست می‌دهد. دوم اینکه در مواردی که تعداد مشاهدات، n ، کوچک است آزمون KS به دلیل دقیق بودن اعمال شدنی است حال آنکه آزمون χ^2 اساساً برای

1. A. N. kolmogorov
2. N. V. Smirnov

نمونه‌های بزرگ استفاده می‌شود. سوم اینکه آزمون KS نسبت به آزمون χ^2 از سادگی و سهولت بیشتری برخوردار است. حال مزایای آزمون χ^2 را برمی‌شماریم: اول اینکه آزمون χ^2 را بسادگی می‌توان طوری تغییر داد تا امکان تخمین پارامترها نیز به وسیلهٔ مشاهدات میسر شود، ولی آزمون KS چنین انعطاف‌پذیری را ندارد. دوم اینکه آزمون χ^2 را می‌توان هم در داده‌های پیوسته و هم گسسته به‌کار برد در حالی که آزمون KS فقط در داده‌های پیوسته اعمال‌شدنی است.

در آزمون KS فرض صفری را که آزمون خواهیم کرد آن است که توزیع مشاهدات، توزیع مشخصی (با پارامتر معینی) است که با حدس و یا قرائن مختلف فکر کرده‌ایم توزیع مشاهدات با آن توزیع مشخص همخوانی دارد. آمارهٔ آزمون KS را با D_n نشان می‌دهیم. آزمون KS مبتنی بر جدول خاصی است که به صورت جدول شمارهٔ ۸ پیوست آورده شده است. اگر آمارهٔ آزمون از مقدار جدول کوچکتر باشد فرض صفر پذیرفته، در غیر این صورت رد می‌شود.

آمارهٔ آزمون برابر است با حداکثر قدر مطلق تفاضل فراوانی مشاهده شده نسبی تجمعی از فراوانی نظری نسبی تجمعی، یعنی:

$$D_n = \text{Maximum } |F_e - F_o|$$

که در آن F_e و F_o به ترتیب فراوانی نظری نسبی تجمعی و فراوانی مشاهده شده نسبی تجمعی است.

مثال ۱۴-۱۶ این داده‌ها مربوط به ورود کشتیها به اسکله‌ای برای بارگیری نفت در ۱۴ روز مختلف است:

تعداد ورودها در هر روز	۰	۱	۲	۳	۴	۵ و بیشتر
تعداد روزها	۲	٤	۵	۱	۰	۲

آیا می‌توان در سطح معنی‌دار ۵ درصد ادعا کرد که توزیع ورودها با توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = ۲$ همگون است؟

۱. فرضها: توزیع مشاهدات با توزیع پواسون با $\lambda = ۲$ همگون است : H_0

توزیع مشاهدات با توزیع پواسون با $\lambda = ۲$ همگون نیست : H_1

۲. آماره آزمون: فراوانی نسبی نظری جدول ذیل را با استفاده از فرمول توزیع پواسون، $P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$، به دست آورده‌ایم.

تعداد ورودها (X)	فراوانی مشاهده شده	فراوانی تجمعی مشاهده شده	فراوانی‌نسبی تجمعی مشاهده شده (F_o)	فراوانی‌نسبی نظری	فراوانی نسبی تجمعی نظری (F_e)	$F_e - F_o$	$\|F_e - F_o\|$
۰	۲	۲	۰/۱۴۳	۰/۱۳۵	۰/۱۳۵	−۰/۰۰۸	۰/۰۰۸
۱	٤	٦	۰/٤۲۸	۰/۲۷۱	۰/٤۰٦	−۰/۰۲۲	۰/۰۲۲
۲	٥	۱۱	۰/۷۸٥	۰/۲۷۱	۰/٦۷۷	−۰/۱۰۸	۰/۱۰۸
۳	۱	۱۲	۰/۸٥۷	۰/۱۸۰	۰/۸٥۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
٤	۰	۱۲	۰/۸٥۷	۰/۰۹۰	۰/۹٤۷	۰/۰۹۰	۰/۰۹۰
≥٥	۲	۱٤	۱/۰۰۰	۰/۰٥۳	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

با توجه به ستون آخر مشخص می‌شرد که حداکثر مقدار $|F_e - F_o|$ با ۰/۱۰۸ برابر است، یعنی:

$$D_n = \text{Maximum}\ |F_e - F_o| = ۰/۱۰۸$$

۳. مقدار بحرانی: داریم ۱٤ = n و ۰/۰٥ = ∝ بنابراین $D_{۰/۰٥,۱٤} =$ ۰/۳٤۹.

٤. تصمیم‌گیری: چون $D_n =$ ۰/۱۰۸ بزرگتر یا مساوی ۰/۳٤۹ نیست نمی‌توان فرض صفر را مردود دانست؛ بنابراین می‌پذیریم که داده‌های فوق با توزیع پواسون با میانگین ورود ۲ کشتی در روز همگون است.

تمرین

۱. آیا می‌توان در سطح معنی‌دار ٥ درصد ادعا کرد که داده‌های زیر با توزیع پواسون با $\lambda =$ ۲/۳ همگون هستند؟

تعداد مراجعات	۰	۱	۲	۳	٤	٥	٦ و بیشتر
فراوانی	۳	٤	۳	٥	۰	۱	۲

۲. جدول توزیع فراوانی زیر مربوط به نمره‌های نهایی ٥۰ دانشجوی دانشگاهی بزرگ در درس زبان عمومی ۱ است که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند (مقیاس نمره‌ها ۰ تا ۱۰۰ بوده است).

طبقات	فراوانی
کمتر از ۴۰	۵
۴۰-۵۰	۱۳
۵۰-۶۰	۱۰
۶۰-۷۰	۱۵
۷۰-۸۰	۳
بیشتر از ۸۰	۴

میانگین و واریانس نمره‌های فوق به ترتیب ۵۷ = μ و ۱۴۸ = σ^2 است. آیا می‌توان در سطح معنی‌دار ۵ درصد ادعا کرد که توزیع نمره‌های فوق، نرمال با ۵۷ = μ و ۱۴۸ = σ^2 است؟

۳. توزیع ورود کامیونها برای دریافت بار به سردخانه‌ای در ۲۰ روز گذشته به این صورت بوده است. آیا ادعای پواسون بودن توزیع ورود کامیونها را با ۲ = λ در سطح معنی‌دار یک درصد می‌پذیرید؟

تعداد ورودیها	۰	۱	۲	۳	۴	≥۵
روز	۳	۴	۷	۳	۲	۱

۱۶-۸ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. یکی از محاسن روشهای ناپارامتری آن است که مستلزم فرض خاصی دربارهٔ شکل توزیع جامعه نیست. ص ☐ غ ☐

۲. روشهای ناپارامتری کارآتر از روشهای پارامتریک هستند. ص ☐ غ ☐

۳. آزمون علامت یک نمونه‌ای برای قضاوت دربارهٔ میانگین جامعهٔ متقارن پیوسته مطرح می‌شود. ص ☐ غ ☐

۴. در اکثر روشهای ناپارامتری فرض بر این است که جامعهٔ مورد نظر نرمال نباشد. ص ☐ غ ☐

۵. آزمون کولموگروف ـ اسمیرنوف معیاری برای اظهارنظر دربارهٔ همگونی توزیعی با یک توزیع نظری است. ص ☐ غ ☐

۶. آزمون H همان کاری را در روشهای ناپارامتری انجام می‌دهد که تحلیل واریانس در روشهای پارامتری انجام می‌دهد. ص ☐ غ ☐

۷. یکی از مزیتهای آزمون χ^2 بر آزمون KS در این است که برای نمونه‌های کوچک نیز اعمال‌شدنی است. ص ☐ غ ☐

۸. آزمون رتبهٔ علامت‌دار به دلیل استفاده از هم رتبه و هم علامت نسبت به آزمون علامت باعث اتلاف کمتر اطلاعات می‌شود. ص ☐ غ ☐

۹. آزمون علامت یک نمونه‌ای ما را قادر می‌سازد راجع به تساوی میانگینهای دو جامعه قضاوت کنیم. ص ☐ غ ☐

۱۰. در آزمون مبتنی بر ردیفها، یک ردیف عبارت است از توالی حروف واحدی (یا هر علامت دیگری) که قبل و بعد از آنها ممکن است حروف دیگری قرار گرفته باشد و یا اصلاً چیزی نباشد. ص ☐ غ ☐

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. در همبستگی کامل مستقیم، ضریب همبستگی رتبه‌ای r_s با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) ۱− ب) ۱+ ج) ۰ د) بین ۰ تا ۱−

۱۲. در آزمون H ، اگر قصد مقایسهٔ k جامعه را داشته باشیم، درجه آزادی با کدام یک از این گزینه‌ها برابر خواهد بود؟

الف) k ب) $k-1$ ج) n_k-1 د) $n-k$

۱۳. تعداد ردیفهای رشتهٔ MFMMMFFM با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ٤ د) ۵

۱٤. آمارهٔ آزمون کولموگوروف - اسمیرنوف، D_n، با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) $\text{Maximum } |F_e + F_o|$ ب) $\text{Minimum } |F_e + F_o|$

ج) $\text{Minimum } |F_e - F_o|$ د) $\text{Maximum } |F_e - F_o|$

۱۵. در آزمون رتبهٔ علامت‌دار، در کدام یک از موارد زیر می‌توان برای برگزاری آزمون از تقریب نرمال استفاده کرد؟

الف) $n = 5$ ب) $n = 10$ ج) $n = 18$ د) هر سه

سؤالات ۱٦ تا ۱۹ مربوط به این وضعیت است: فرض کنید مدت بستری بودن چند بیمار در بیمارستانی در دو بخش ۱ و ۲ برحسب روز به صورت زیر است:

بخش ۱	۱۰	۱٤	۸	۳	٦	۹	۸	۱٦	۱۲
بخش ۲	٦	۵	٤	۱۳	۱۱	۲	۲		

۱٦. در آزمون مجموع رتبه‌ای U، رتبهٔ عدد ۱٤ با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) ۱٤ ب) ۱٤/۵ ج) ۱۵ د) ۱۵/۵

۱۷. در آزمون مجموع رتبه‌ای U ، رتبهٔ اعداد ٦ با کدام یک از این موارد برابر است؟

الف) ۳ ب) ۲/۵ ج) ٦ د) ٦/۵

۱۸. در آزمون مجموع رتبه‌ای U، مجموع رتبه‌های بخش ۲، R_2، با کدام یک از این موارد برابر است؟
الف) ۴۳ ب) ۴۳/۵ ج) ۴۴ د) ۴۴/۵
۱۹. در آزمون مجموع رتبه‌ای U، مقدار آمارهٔ U_2 با کدام یک از این موارد برابر است؟
الف) ۱۶/۵ ب) ۱۷ ج) ۱۷/۵ د) ۱۸

مسائل

۲۰. سود و زیان شرکتی در ۲۵ سال گذشته به این صورت بوده است:

س س س س س ز س س س س س ز س س س س ز ز س س س س س

که در آن «س» معرف سود و «ز» معرف زیان است. در سطح معنی‌دار ۵ درصد موارد زیر را انجام دهید:

الف) با آزمون علامت مشخص کنید که آیا می‌توان گفت که میانگین سود شرکت صفر بوده است ($\mu = 0$)؟

ب) با آزمون مبتنی بر ردیفها مشخص کنید که آیا می‌توان گفت که سود و زیان شرکت در هر سال تصادفی است؟

۲۱. داده‌های جدول زیر مربوط به تعداد شکایاتی است که از سه دایرهٔ مالی، خدماتی و تولیدی سازمانی به مدیر عامل آن در سالهای مختلف رسیده است.

مالی	خدماتی	تولیدی
۳۸	۱۸	۱۶
۲۲	۳۵	۱۵
۴۵	۱۶	۲۰
۱۴		۱۳
		۱۹

در سطح معنی‌دار یک درصد موارد زیر را محاسبه کنید:

الف) با استفاده از جدول تحلیل واریانس آزمون کنید که آیا میانگین شکایات از دوایر مختلف متفاوت است؟

ب) با استفاده از آزمون H آزمون کنید که آیا میانگین شکایات از دوایر مختلف متفاوت است؟

بایگانی فایل های حسابداری ، حسابرسی ، مالیاتی و مقالات
@Fileaccunting
مدیریت : امین یوسفیان

۲۲. در خیلی از کتابها آماره‌های u_1 و u_2 را به این صورت داده‌اند:

$$u_1 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$$

$$u_2 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

معادل بودن عبارات فوق را با عبارتهایی که در صفحه ۲٦۱ آمده، نشان دهید.

۲۳. توزیع فراوانی زیر مربوط به خالص وزن چغندرِ قندی است که کامیونهای مختلف به کارخانهٔ قندی طی سال گذشته آورده‌اند. وزن خالص چغندر برحسب تن است.

فراوانی	طبقه
۱۳	≤ ٤/۰۱۰
۱۵۸	٤/۰۱۰ – ۵/۸۷۰
٤۳۷	۵/۸۷۰ – ۷/۷۳۰
۱۲۲	۷/۷۳۰ – ۹/۵۹۰
۲۰	≥ ۹/۵۹۰
۷۵۰	

میانگین و واریانس توزیع فوق به ترتیب عبارتند از ٦/۸۰۰۰ و ۱/۵۳۷٦.
آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان گفت که توزیع فوق، توزیع نرمال با $\mu = ٦/۸۰۰۰$ و $\sigma^2 = ۱/۵۳۷٦$ است؟ (جهت پاسخگویی به سؤال از آزمون کولموگوروف - اسمیرنوف استفاده کنید.)

۲٤. این اعداد زمان رسیدن دو آمبولانس، بر حسب دقیقه، به محل حادثه است:

آمبولانس اول	۱۰/۳	۱٤/۰	٦/٤	۱۱/۲	۹/۲	۷/٦	۱۰/۰	۱۳/۱	۵/۵	۹/۳
آمبولانس دوم	۷/۵	٦/٤	۷/۲	٤/۵	۹/۱	٦/٦	۱۲/۷			

فرض کنید که داده‌های فوق تشکیل نمونه‌های تصادفی را می‌دهند. با استفاده از آزمون U در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید که آیا می‌توان گفت که میانگین زمان رسیدن آمبولانس اول به محل حادثه کمتر از آمبولانس دوم است؟

۲۵. این جدول معدل نمره‌های ۷ نفر لیسانسیه (در مقیاس ۰ تا ۲۰) و میزان موفقیت آنها را

در کارشان (در مقیاس ۰ تا ۱۰۰) نشان می‌دهد.

فرد	الف	ب	ج	د	هـ	و	ز
معدل نمره‌ها	۱۳/۲	۱۶/۷	۱۵/۱	۱۲/۸	۱۳/۶	۱۴/۸	۱۷/۶
میزان موفقیت	۶۵	۷۳	۵۳	۴۸	۴۳	۵۹	۸۷

الف) ضریب همبستگی رتبه‌ای را حساب کنید.
ب) آیا در سطح معنی‌دار ۵ درصد می‌توان گفت که ضریب همبستگی فوق بیشتر از ۰/۷۵ است؟

۲۶. از دو مدیر پروژه شرکت خواسته‌ایم تا برآورد خود را در مورد زمان لازم برای اتمام ۱۸ فعالیت مختلف پروژه‌ای جدید اعلام کنند. این جدول برآورد زمانی این دو مدیر پروژه را، برحسب هفته، نشان می‌دهد.

فعالیت	برآورد مدیر اول	برآورد مدیر دوم	فعالیت	برآورد مدیر اول	برآورد مدیر دوم
۱	۷/۳	۶/۱	۱۰	۳/۶	۲/۵
۲	۵/۳	۴/۳	۱۱	۶/۴	۵/۹
۳	۷/۱	۷/۱	۱۲	۸/۸	۷/۶
۴	۳/۸	۲/۵	۱۳	۴/۸	۵/۹
۵	۶/۴	۳/۱	۱۴	۶/۱	۶/۰
۶	۸/۴	۱۲/۳	۱۵	۳/۴	۳/۵
۷	۵/۰	۶/۴	۱۶	۳/۰	۲/۴
۸	۳/۱	۲/۵	۱۷	۱/۰	۰/۹
۹	۰/۸	۰/۶	۱۸	۶/۴	۵/۸

در سطح معنی‌دار ۵ درصد با استفاده از، الف) آزمون علامت زوج - نمونه‌ای، ب) آزمون رتبهٔ علامت‌دار تعیین کنید که ادعای خوشبینانه بودن مدیر دوم معقول است؟

۲۷. داده‌های زیر مقدار پولی است که ۸ نفر، بر حسب ریال، در گردشگاهی خرج کرده‌اند:

۴۴۱۰ و ۹۸۷۶ و ۳۴۸۲ و ۱۲۰۱ و ۵۴۳۸ و ۳۵۲۰ و ۵۴۳۵ و ۴۰۵۰

در سطح معنی‌دار ۰/۱۰ با استفاده از آزمون علامت تعیین کنید که آیا ادعای: «میانگین پولی که هر شخص در این گردشگاه خرج می‌کند ۴ هزار ریال است» معقول است؟

پاسخنامهٔ سؤالات

۱) ص	۲) غ	۳) ص	٤) غ
٥) ص	٦) ص	۷) غ	۸) ص
۹) غ	۱۰) ص	۱۱) ب	۱۲) ب
۱۳) د	۱٤) د	۱٥) ج	۱٦) ج
۱۷) د	۱۸) د	۱۹) الف	

فصل هفدهم

تجزیه و تحلیل سریهای زمانی و مدلهای پیش‌بینی

۱ـ۱۷ ـ مقدمه

در این فصل ما دربارهٔ نوع خاصی از داده‌ها با عنوان «سری زمانی»[1] بحث خواهیم کرد. این نوع داده‌ها در قالب یک متغیر خاص در طول زمان رخ می‌دهند؛ برای مثال می‌توان به تولید ماهانه یک کارخانه، بودجهٔ سالانهٔ یک سازمان و یا قیمت فروش یک کالا در هفته اشاره کرد. پس «سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات است که بر حسب زمان (یا هر کمیت دیگر) مرتب شده باشد» و معمولاً آن را به صورت X_1، X_2، ...، X_n نشان می‌دهند. تجزیه و تحلیل سریهای زمانی به مشاهداتی مربوط می‌شود که مستقل نبوده و به طور متوالی به هم وابسته‌اند. همهٔ فنونی که در فصول قبل برای تجزیه و تحلیل داده‌ها بحث شده‌اند به نحو بارزی بر «نمونه تصادفی»[2] متکی هستند و فرض اساسی آنها مستقل بودن مشاهدات نمونه نسبت به هم دیگر است، در حالی که دسته‌ای دیگر از مشاهدات وجود دارد که عناصر آنها به هم وابسته‌اند؛ برای مثال فروش ماهانه یک کارخانه می‌تواند به ماه (ماههای) قبل وابسته باشد.

در ضمن کاربرد اصلی تجزیه و تحلیل سریهای زمانی «پیش‌بینی»[3] است. بدیهی است، چنانچه وابستگی خاصی بین داده‌ها در طول زمان وجود داشته باشد، فرصت مناسبی پیش می‌آید تا به کمک آن مشاهدات، بتوان روند آیندهٔ پدیده‌ای را پیش‌بینی کرد. یکی از وظایف اصلی مدیران، تصمیم‌گیری و سیاستگذاری برای آینده سازمان خویش است. پس تجزیه و تحلیل سریهای زمانی و پیش‌بینی پدیده‌ها می‌تواند ابزار بسیار مناسبی برای تصمیم‌گیری مدیران باشد. در این فصل تلاش می‌شود ضمن شناخت اجزای یک سری زمانی، فنون مختلف پیش‌بینی، بررسی و معرفی شود.

---

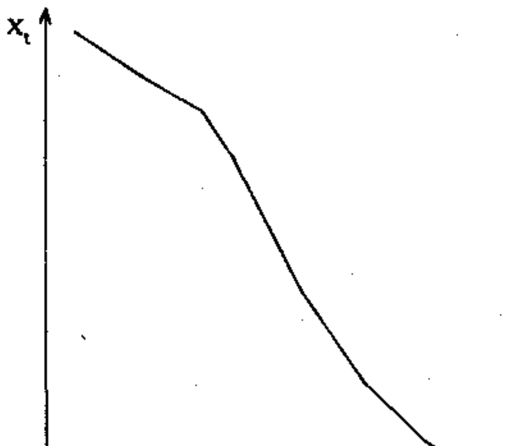
1. time series 2. random sample 3. forecasting

۱۷-۲ اجزای تشکیل دهندهٔ سری زمانی

تغییرات سری زمانی می‌تواند به علت تغییرات بعضی از عوامل که تعدادی از آنها طبیعی بوده و تعدادی دیگر ناشی از عوامل اقتصادی و اجتماعی هستند، به‌وجود آید. با دقت در سری زمانی و با توجه به نمودار آن، اجزای تشکیل دهندهٔ سری زمانی را می‌توان شناخت و آنها را اندازه گرفت. معمولاً برای تحلیل یک سری زمانی تغییراتی که نتیجهٔ چهار مؤلفه اصلی هستند در نظر گرفته می‌شود که این اجزاء یا مؤلفه‌ها به ترتیب شرح داده می‌شوند.

۱۷-۲-۱ روند

روند[1] عبارت است از تغییرات دراز مدت در میانگین سری زمانی؛ به عبارت دیگر سیر طبیعی سری زمانی را در دراز مدت روند گویند که در این صورت افت و خیزهای سری زمانی را نادیده گرفته و به نمای کلی آن توجه می‌کنند؛ برای مثال رشته کوهها از نزدیک پستی و بلندیهای زیادی دارند، ولی روی نقشه با یک منحنی ساده نشان داده می‌شوند. از مطالعهٔ داده‌ها در یک دورهٔ طولانی می‌توان ایده‌ای کلی نسبت به رفتار پدیدهٔ مورد بررسی به دست آورد که در پیش‌بینی آینده مؤثر است. مثلاً اگر سری زمانی، روندی را



شکل ۱۷.۱ منحنی روند نزولی در سری زمانی

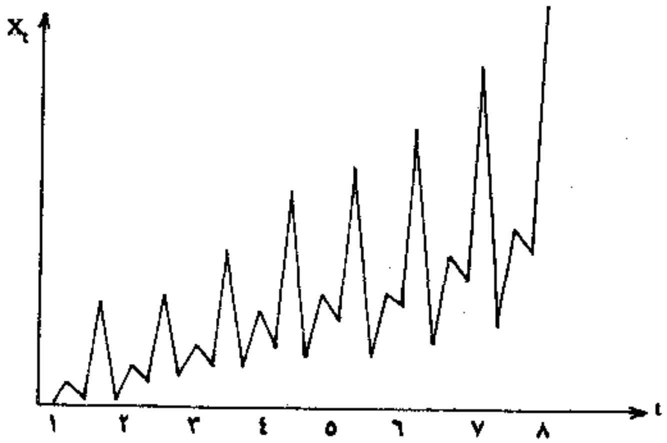
1. trend

در یک جهت نشان دهد در آن صورت با فرض آنکه این فرایند در آینده نزدیک نیز به همین شکل ادامه پیدا می‌کند، می‌توان مقادیر پدیده را برای آینده نیز پیش‌بینی کرد. شکل ۱ـ۱۷ مثال خوبی برای روند نزولی در یک سری زمانی است. در این شکل محور افقی بیانگر زمان (t) و محور عمودی نشان‌دهندهٔ مشاهدات متوالی سری زمانی (X_t) است.

۲ـ۲ـ۱۷ تغییرات فصلی

تغییرات فصلی[1] تغییراتی هستند که در دوره‌های تناوبی کوتاه پیش‌می‌آیند. این تغییرات مربوط به عواملی هستند که به طریقی منظم و چرخه‌ای روی یک دورهٔ کمتر از یک سال عمل می‌کنند. اگر مشاهدات سری زمانی به صورت هر سه ماه، ماهانه، هفتگی و یا روزانه ثبت شوند، تغییرات فصلی در سری زمانی وجود دارد. شکل ۲ـ۱۷ نشان‌دهندهٔ تغییرات فصلی است.

چنانکه در شکل مشخص است، تغییراتی در هر فصل نسبت به فصل دیگر وجود دارد و تقریباً نوسانات در دوره‌های متوالی، مشابه و صعودی است. بنابراین اگرچه نوسانات فصلی وجود دارد، ولی روند تغییرات در بلند مدت صعودی است؛ برای مثال،



شکل ۲ـ۱۷ منحنی تغییرات فصلی

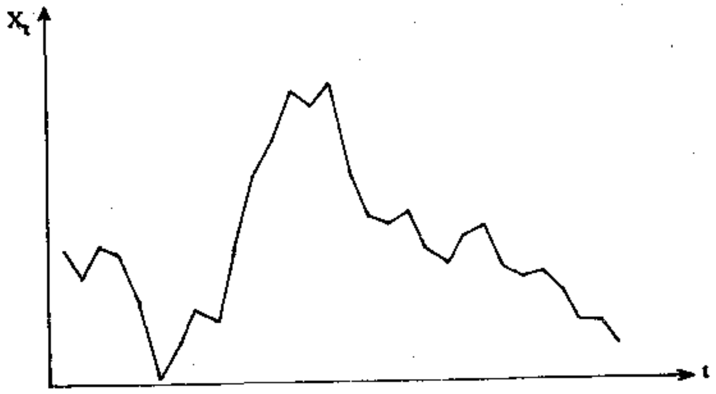
1. seasonal

شکل فوق می‌تواند به قیمت سهام شرکتی مربوط باشد که در پایان سال مالی افزایش چشمگیری داشته و یا قیمت کالایی طی فصول مختلف باشد که قیمت آن در پایان سال به علت عید نوروز افزایش بیشتری داشته است.

۱۷ـ۲ـ۳ تغییرات دوره‌ای

حرکات نوسانی در یک سری زمانی با دوره نوسان بیشتر از یک سال را تغییرات دوره‌ای[1] می‌نامند. این تغییرات در سریهای زمانی به واسطهٔ افت و خیزهایی است که بعد از یک دورهٔ بیشتر از یک سال رجعت می‌کنند. نوسانات دوره‌ای ممکن است به طور دقیق از طرحهای مشابهی بعد از فواصل زمانی مساوی پیروی کنند، ولی همیشه اینطور نیست.

شکل ۱۷ـ۳ نشان دهندهٔ تغییرات دوره‌ای در سری زمانی است. چنانکه در این شکل مشخص است، اگر خط روند، موازی با محور t تصور شود، می‌توان نوسانات دوره‌ای را بالا و پایین خط روند مشخص کرد. چنین نوساناتی را «تغییرات دوره‌ای» می‌نامند.



شکل ۱۷ـ۳ تغییرات دوره‌ای

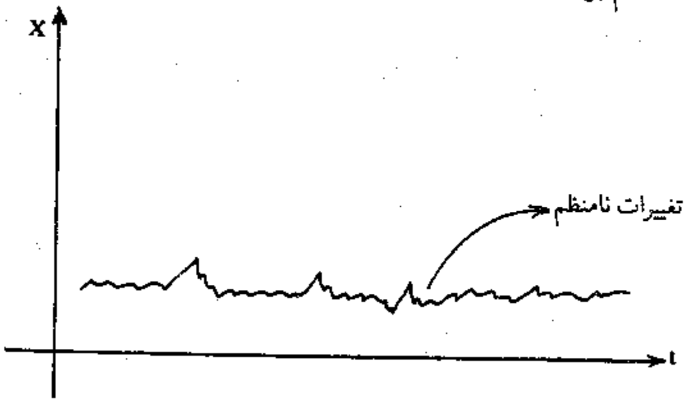
۱۷ـ۲ـ٤ تغییرات نامنظم

در هر سری زمانی عامل دیگری وجود دارد که آن را تغییرات نامنظم[2] یا تصادفی می‌نامند. این تغییرات کاملاً تصادفی بوده و نتیجهٔ نیرویی پیش‌بینی نشدنی است که به

---

1. cyclical
2. irregular

طریقی نامنظم عمل می‌کند. این گونه تغییرات، طرح معینی را نشان نمی‌دهند و دورهٔ زمان وقوع آنها منظم نیست. برای مثال این تغییرات به وسیلهٔ عواملی مانند سیل، زلزله، اعتصابها و غیره به وجود می‌آیند که رفتار آنها نامنظم و پیش‌بینی نشدنی است و به طور معمول کوتاه مدت هستند، ولی گاهی اوقات اثر آنها به اندازه‌ای زیاد است که باعث پیدایش تغییرات دوره‌ای و تغییرات دیگر می‌شود. به دلیل تصادفی بودن این تغییرات، نه امکان جداسازی و مطالعهٔ انحصاریشان وجود دارد و نه آنها را می‌توان به طور دقیق پیش‌بینی کرد. شاید بهترین راه این باشد که براساس تجربیات گذشته تقریباً آنها را برآورد کنیم و برای این ناهنجاریها در طول زمان، تدارک ببینیم. شکل ۴ـ۱۷ نشان‌دهندهٔ نوسانات نامنظم برای مشاهدات در طول t است.



شکل ۴ـ۱۷ تغییرات نامنظم سری زمانی

تجزیهٔ مفهومی سری زمانی به اجزای «روند» ، «فصلی» ، «دوره‌ای» و «نامنظم» ما را در توصیف بیشتر سری زمانی یاری خواهد داد. شاید بهتر باشد این بیانات توصیفی را در قالب مدلی ریاضی بیان کنیم. فرض کنید X_t بیانگر مقدار سری در زمان t باشد، پس می‌توان «مدل جمعی»[1] سری زمانی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$X_t = T_t + S_t + C_t + I_t \qquad (۱۷ـ۱)$$

که در آن T_t جزء روند؛ S_t جزء فصلی؛ C_t جزء دوره‌ای و I_t جزء نامنظم است.

از طرف دیگر در بعضی شرایط ممکن است یک «مدل ضربی»[2] برای بیان

1. additive model
2. multiplicative model

ریاضی اجزای سری زمانی مناسب باشد که در آن صورت این مدل به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$X_t = T_t . S_t . C_t . I_t \qquad (۱۷-۲)$$

در حقیقت، مدلهای مربوط به سری زمانی صرفاً به این دو مدل محدود نمی‌شوند. در شرایط مختلف می‌توان برای توصیف سری زمانی ترکیب خاصی از مدل جمعی و مدل ضربی در نظر گرفت. البته ترکیبی که بهترین توصیف را از رفتار سری زمانی در آینده داشته باشد.

برای پیش‌بینی رفتار سریهای زمانی و تعیین مدل پیش‌بینی، فنون مختلفی وجود دارد: این فنون را می‌توان به دو دسته؛ روشهای کمّی[1] و روشهای کیفی[2] تقسیم کرد که تلاش می‌شود، مهمترین فنون هر دسته در بخشهای بعدی توضیح داده شود.

تمرین

۱. اجزای یک سری زمانی را ذکر کنید.
۲. مفهوم جزء «روند» را با ذکر یک مثال بیان کنید.
۳. مفهوم تغییرات فصلی را با ذکر یک مثال بیان کنید.
٤. مفهوم تغییرات دوره‌ای را با ذکر یک مثال و ترسیم شکل آن بیان کنید.
٥. مفهوم تغییرات نامنظم را با ذکر یک مثال و ترسیم شکل آن بیان کنید.
٦. مدل ضربی و مدل جمعی اجزای تشکیل‌دهندهٔ سری زمانی را بنویسید.

۱۷-۳ مدلهای کمّی پیش‌بینی

چنانچه تحلیلگر براساس رفتار مشاهده شده از سری زمانی و تجزیه و تحلیل اجزای آن قانع شود که می‌توان مقادیر آینده را با استفاده از مبانی ریاضی پیش‌بینی کرد، از مدلهای کمّی برای پیش‌بینی در سری زمانی استفاده می‌شود. مدلهای کمّی پیش‌بینی که بسیار زیاد و متنوع هستند عبارتند از: ۱) مدلهای ساده، ۲) مدلهای میانگین متحرک، ۳) مدلهای نمو هموار، ٤) مدلهای هُلت ـ وینترز[3]، ٥) مدلهای باکس و جنکینز[4] و ٦) مدلهای اقتصادسنجی.

1. quantitative methods
2. qualitative methods
3. Holt-Winters models
4. Box-Jenkins models

برای بررسی یک مدل پیش‌بینی و یا انتخاب بهترین مدل از بین مدلهای مختلف برای سری زمانی به شاخصی نیاز داریم که به کمک آن تصمیم لازم در خصوص قبول یا رد مدل پیش‌بینی اتخاذ شود. به طور کلی هرچه مقدار واقعی سری (X_t) به مقدار پیش‌بینی شدهٔ آن ($\hat{X}_t$) نزدیکتر باشد، بر «صحت»[1] بیشتر مدل پیش‌بینی دلالت دارد. بنابراین کیفیت یک مدل با بررسی میزان خطای پیش‌بینی ($X_t - \hat{X}_t$) قابل ارزیابی است. در این راستا چهار شاخص عمومی می‌توان به شرح زیر معرفی کرد:

۱. میانگین قدر مطلق انحرافات[2] (MAD)،

۲. میانگین مجذور خطا[3] (MSE)،

۳. جذر میانگین مجذور خطا[4] (RMSE)،

٤. میانگین قدرمطلق درصد خطا[5] (MAPE).

معادلات ۳ـ۱۷ تا ٦ـ۱۷ چگونگی محاسبهٔ هریک از شاخصهای فوق را نشان می‌دهند:

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} | X_t - \hat{X}_t | \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (X_t - \hat{X}_t)^2 \qquad (۱۷\text{-}٤)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (X_t - \hat{X}_t)^2} \qquad (۱۷\text{-}۵)$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left| \frac{X_t - \hat{X}_t}{X_t} \right| (\%100) \qquad (۱۷\text{-}٦)$$

تفاوت اساسی بین MAD و MSE (یا RMSE) آن است که MSE (و RMSE) برای خطاهای بزرگتر، نسبت به MAD، جریمهٔ سنگین‌تری قائلند. زمانی که جریمهٔ خطاهای پیش‌بینی به طور خطی با اندازهٔ خطا افزایش می‌یابد، شاخص MAD یک شاخص مناسب برای صحت پیش‌بینی خواهد بود. شاخص MSE (و RMSE) اگر

1. accuracy
2. mean absolute deviation
3. mean square errors
4. root mean square error
5. mean absolute percentage error

جریمهٔ خطاهای بزرگ سنگین نباشد، بهترین شاخص برای اندازه‌گیری صحت پیش‌بینی خواهد بود.

از آنجایی که شاخص MAPE یک شاخص درصدی و «فاقد واحد اندازه‌گیری»[1] است، برای مقایسهٔ عملکرد یک مدل در سریهای زمانی مختلف مفید خواهد بود. در صورتی که سری، مقادیر خیلی کوچک داشته باشد، توصیه می‌شود که از شاخص MAPE استفاده نشود. زیرا تقسیم کردن خطا بر مقادیر خیلی کوچک سبب متورم شدن شاخص خواهد شد.

معمولاً زمانی که از MAD ، MSE یا RMSE برای ارزیابی مدل استفاده می‌شود، داده‌های واقعی سری زمانی به دو بخش تقسیم می‌گردند. از اولین بخش مشاهدات برای برآورد پارامترهای مدل پیش‌بینی استفاده شده و از بخش دوم برای بررسی صحت مدل برازش شده استفاده می‌شود؛ به عنوان مثال اگر دنبالهٔ مشاهدات سری زمانی بیانگر ۷۲ ماه باشد، می‌توانیم از مشاهدات ٤۸ ماه اول برای برآورد پارامترهای مدل پیش‌بینی استفاده کرده و سپس به کمک مدل برازش شده، مقادیر پیش‌بینی مربوط به ۲٤ ماه بعدی را محاسبه کنیم. صحت مدل با محاسبهٔ MAD ، MSE و یا RMSE برای خطای پیش‌بینی ۲٤ ماه دوم مشخص می‌شود.

۱ـ۳ـ۱۷ مدلهای ساده

برخی از مدلهای کمّی پیش‌بینی بسیار ساده و ابتدایی هستند و از آنها می‌توان در هر نوع سری زمانی استفاده کرد. مدلهایی که در این بخش بحث می‌شوند «مدلهای ساده»[2] هستند. مدلهای ساده معمولاً مبنایی برای ارزیابی صحت مدلهای پیچیده و یا نسبتاً پیچیده می‌باشند، به طوری که می‌توان با مقایسهٔ خطای پیش‌بینی مدلهای پیچیده با مدلهای ساده به درجهٔ اعتبار آنها پی‌برد. در این بخش ما دو نوع از معروفترین مدلهای ساده را معرفی خواهیم کرد. این مدلها عبارتند از:

الف) مدل پیش‌بینی بدون تغییر.[3] ساده‌ترین نوع پیش‌بینی آن است که X_t را بدون هیچ‌گونه تغییری به عنوان پیش‌بینی $t+1$ ، $\hat{X}_{t+1}$، تلقی کنیم. یعنی اینکه؛ $\hat{X}_{t+1} = X_t$. در

---

1. unitless 2. naive model 3. no-change forecasting model

این مدل فرض می‌شود که مقادیر فعلی سری زمانی برآورد خوبی از مقادیر بعدی خواهند بود.

ب) مدل پیش‌بینی با درصد تغییر.[1] در این مدل فرض می‌شود که مقدار پیش‌بینی در ۱+t، $\hat{X}_{t+1}$، با درصد افزایشی (کاهشی) در X_t رخ خواهد داد. یعنی اینکه؛ $\hat{X}_{t+1} = (1+K)X_t$. مقدار K، بیانگر درصد تغییر در X_t است و به صورت اعشاری بیان می‌شود.

در بسیاری از موارد از مدلهای فوق برای پیش‌بینی استفاده می‌شود؛ برای مثال اگر مدیر شرکتی معتقد است که شرایط برای فروش همچنان ثابت است، می‌تواند از مدل بدون تغییر برای پیش‌بینی فروش دورهٔ بعدی خود استفاده کند، ولی اگر اعتقاد دارد که فروش ۱۰ درصد افزایش می‌یابد، می‌تواند از مدل درصد تغییر استفاده کند و $K = ۰/۱۰$ را در نظر بگیرد.

مدل پیش‌بینی بدون تغییر معمولاً برای آن دسته از سریهایی به کار می‌رود که هیچ‌گونه رشد و یا کاهش بلندمدتی را از خود نشان نمی‌دهند. در عوض از مدل پیش‌بینی با درصد تغییر، زمانی استفاده می‌شود که سری زمانی یک رفتار نمایی[2] با روند صعودی یا نزولی از خود نشان دهد.

تمرین

۱. داده‌های زیر بیانگر مقادیر واقعی و مقادیر پیش‌بینی شده برای یک سری زمانی طی پنج سال هستند.

t	X_t	$\hat{X}_t$
۱	۳۲/۸	۳۳/۱
۲	۳۵/٦	۳۲/٤
۳	۳۳/٦	۳۰/٦
٤	۲۹/۳	۲۹/۹
٥	۳۱/٥	۳۳/۷

الف) شاخصهای MAD، MSE، RMSE و MAPE را محاسبه کنید.

1. percent-change forecasting model
2. exponential fashion

ب) ضمن مقایسهٔ مقادیر شاخصها، تعیین کنید که برای تعیین صحت مدل پیش‌بینی داده‌های جدول، کدام شاخص مناسبتر است؟ چرا؟

۲. مشاهدات یک سری زمانی طی چهار فصل برای دو سال به صورت زیر داده شده است:

فصل	سال اول	سال دوم
۱	۰/۲۶	۰/۳۰
۲	۰/۳۱	۰/۳۵
۳	۰/۴۷	۰/۴۵
۴	۰/۳۷	۰/۴۱

الف) از یک مدل پیش‌بینی بدون تغییر برای پیش‌بینی مقادیر فصل دوم از سال اول تا فصل چهارم از سال دوم استفاده کنید و مقادیر را به دست آورید.

ب) با استفاده از مدل درصد تغییر (با $K = ۰/۰۵$) مقادیر فصل دوم از سال اول تا فصل چهارم از سال دوم را پیش‌بینی کنید.

ج) شاخص MSE را برای مقادیر پیش‌بینی در بند الف و ب محاسبه کنید و مشخص کنید که کدام یک از مدلهای پیش‌بینی از صحت بیشتری برخوردارند؟

۲ـ۳ـ۱۷ مدلهای میانگین متحرک

عناصر تصادفی در برخی از سریهای زمانی ممکن است آنقدر قوی باشند که هرگونه نظمی را در سری زمانی از بین ببرند. بنابراین هرگونه تفسیر و تحلیل ذهنی و بصری در خصوص نمودار سری زمانی با مشکل رو به رو می‌شود. در چنین شرایطی، نمودار واقعی سری زمانی بسیار ناهموار خواهد بود و ممکن است در عمل مجبور باشیم برای رسیدن به تصویر واضح از سری زمانی آن را «هموار»[1] کنیم.

هموارسازی از طریق «روش میانگینهای متحرک»[2] حاصل می‌شود. اساس این فن در این ایده نهفته است که هر تغییر تصادفی بزرگ در هر لحظه‌ای از زمان اگر با نقاط همجوارش میانگین گرفته شود، تأثیر ناچیزی از خود به جا خواهد گذاشت. ساده‌ترین فن از این نوع «میانگین متحرک سادهٔ مرکزی ($۲m + ۱$) نقطه»[3] نامیده

1. smooth
2. moving averages method
3. simple centered (2m+۱) point moving average

می‌شود. در این روش، نظر بر این است که هر مشاهدهٔ واقعی (X_t) «با میانگین خودش و m نقطهٔ همجوارش» جایگزین شود. به عبارت دیگر X_t با X_t^* عوض می‌شود. مقدار X_t^* به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$X_t^* = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=-m}^{m} X_{t+j} \qquad (17\text{-}7)$$

$$= (X_{t-m} + X_{t-m+1} + \dots + X_t + \dots + X_{t+m-1} + X_{t+m}) / (2m+1)$$

و $t = m+1, m+2, \dots, n-m$.

برای مثال، فرض کنید که $m = 2$ باشد، بنابراین باید میانگین متحرک را به کمک ۵ نقطه محاسبه کرد. پس خواهیم داشت:

$$X_t^* = (X_{t-2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + X_{t+2}) / 5 \qquad (17\text{-}8)$$

اگر اولین مقدار مشاهده شده X_1 باشد، پس اولین میانگین متحرک به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$X_3^* = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) / 5$$

البته این مقدار (X_3^*) میانگین پنج مشاهدهٔ اوّل است. بدین طریق باید میانگین دسته‌های پنج‌تایی بعدی را تا $n-2$ محاسبه کرد. در این خصوص به مثال ۱-۱۷ توجه کنید. این مثال چگونگی انجام میانگین متحرک را برای $(2m+1)$ نقطه نشان می‌دهد و تأثیر آن را بر شکل واقعی سری زمانی بیان می‌کند.

مثال ۱-۱۷ جدول زیر نشان‌دهندهٔ فروش کل شرکت ایران دارو برحسب میلیون تومان طی سی‌سال گذشته است. اگر $m=2$ باشد، روش میانگین متحرک ساده مرکزی را برای $(2m+1)$ نقطه انجام دهید. سپس شکل هموارشدهٔ سری زمانی را با شکل واقعی آن مقایسه کنید و تحلیل مناسب را در خصوص نوع تغییرات سری ارائه دهید.

جدول ۱۷.۱ مشاهدات مربوط به فروش شرکت ایران دارو از سال ۱۳۴۶ تا ۱۳۷۵ (ارقام برحسب میلیون تومان)

فروش	سال	فروش	سال
۲۱۷۷	۱۳۶۱	۱۸۰۶	۱۳۴۶
۱۹۲۰	۱۳۶۲	۱۶۴۴	۱۳۴۷
۱۹۱۰	۱۳۶۳	۱۸۱۴	۱۳۴۸
۱۹۸۴	۱۳۶۴	۱۷۷۰	۱۳۴۹
۱۷۸۷	۱۳۶۵	۱۵۱۸	۱۳۵۰
۱۶۸۹	۱۳۶۶	۱۱۰۳	۱۳۵۱
۱۸۶۶	۱۳۶۷	۱۲۶۶	۱۳۵۲
۱۸۹۶	۱۳۶۸	۱۴۷۳	۱۳۵۳
۱۶۸۴	۱۳۶۹	۱۴۲۳	۱۳۵۴
۱۶۳۳	۱۳۷۰	۱۷۶۷	۱۳۵۵
۱۶۵۷	۱۳۷۱	۲۱۶۱	۱۳۵۶
۱۵۶۹	۱۳۷۲	۲۳۳۶	۱۳۵۷
۱۳۹۰	۱۳۷۳	۲۶۰۲	۱۳۵۸
۱۳۸۷	۱۳۷۴	۲۵۱۸	۱۳۵۹
۱۲۸۹	۱۳۷۵	۲۶۳۷	۱۳۶۰

با توجه به مقدار m می‌توان با استفاده از رابطه ۱۷.۸ از اولین دستهٔ پنج‌تایی به صورت زیر میانگین گرفت:

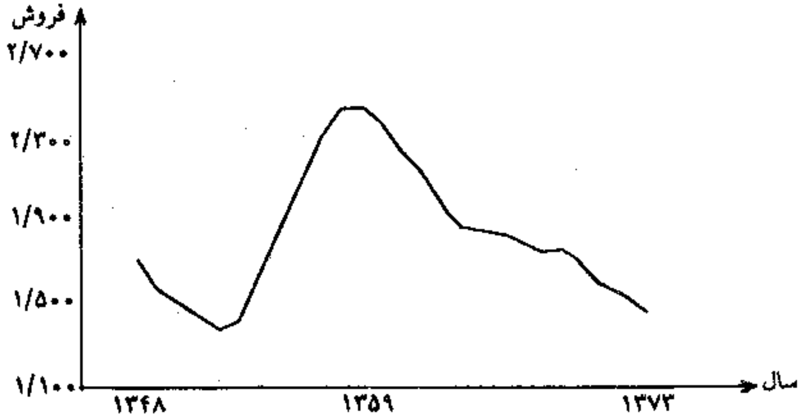
$$X_{۳}^{*} = \frac{۱۸۰۶ + ۱۶۴۴ + ۱۸۱۴ + ۱۷۷۰ + ۱۵۱۸}{۵} = ۱۷۱۰/۴$$

به طریق مشابه $X_{۴}^{*}$ میانگین دستهٔ پنج‌تایی دوم از مشاهدهٔ ششم به بعد خواهد بود. این روش تا مشاهدهٔ بیست و هشتم ادامه خواهد یافت. جدول شماره ۱۷.۲ داده‌های اولیه و سری هموار شده را بخوبی نشان می‌دهد. توجه کنید که وقتی میانگینهای متحرک با این روش محاسبه می‌شوند، ضرورتاً m مشاهده را در ابتدا و انتهای سری هدر می‌دهیم. بنابراین علی‌رغم اینکه مشاهدات اولیه از ۱۳۴۶ تا ۱۳۷۵ ادامه دارد، سری هموار شده صرفاً برای ۱۳۴۸ تا ۱۳۷۳ به دست آمده است.

جدول ۱۷.۲ فروش سالانهٔ شرکت ایران دارو (X_t) و میانگین متحرک ساده متمرکز بر ۵ نقطه (X_t^*)

t	X_t	X_t^*	t	X_t	X_t^*
۱	۱۸۰۶	–	۱۶	۲۱۷۷	۲۲۳۲/۴
۲	۱۶۴۴	–	۱۷	۱۹۲۰	۲۱۲۵/۶
۳	۱۸۱۴	۱۷۱۰/۴	۱۸	۱۹۱۰	۱۹۵۵/۶
۴	۱۷۷۰	۱۵۶۹/۸	۱۹	۱۹۸۴	۱۸۵۸/۰
۵	۱۵۱۸	۱۴۹۴/۲	۲۰	۱۷۸۷	۱۸۴۷/۲
۶	۱۱۰۳	۱۴۲۶/۰	۲۱	۱۶۸۹	۱۸۴۴/۴
۷	۱۲۶۶	۱۳۵۶/۰	۲۲	۱۸۶۶	۱۷۸۴/۴
۸	۱۴۷۳	۱۴۰۶/۴	۲۳	۱۸۹۶	۱۷۵۳/۶
۹	۱۴۲۳	۱۶۱۸/۰	۲۴	۱۶۸۴	۱۷۴۷/۲
۱۰	۱۷۶۷	۱۸۳۲/۰	۲۵	۱۶۳۳	۱۶۸۷/۸
۱۱	۲۱۶۱	۲۰۵۷/۸	۲۶	۱۶۵۷	۱۵۸۶/۶
۱۲	۲۳۳۶	۲۲۷۶/۸	۲۷	۱۵۶۹	۱۵۲۷/۲
۱۳	۲۶۰۲	۲۴۵۰/۸	۲۸	۱۳۹۰	۱۴۵۸/۴
۱۴	۲۵۱۸	۲۴۵۴/۰	۲۹	۱۳۸۷	–
۱۵	۲۶۳۷	۲۳۷۰/۸	۳۰	۱۲۸۹	–

شکل ۱۷.۵ مشاهدات اولیهٔ فروش سالانه شرکت ایران دارو (X_t) : سری زمانی اولیه



شکل ۱۷ـ۶ مشاهدات هموار شدهٔ فروش سالانه شرکت ایران دارو (X_t^*): سری هموار شده

سری هموار شده در شکل ۶ـ۱۷ آمده و با مقایسهٔ آن با شکل ۵ـ۱۷ مشخص می‌شود که سری میانگینهای متحرک بسیار هموارتر از سری زمانی مشاهدات اولیه می‌شود. این تغییر به ما اجازه می‌دهد که تغییرات دوره‌ای را بخوبی در رفتار فروش شرکت ایران دارو مشاهده کنیم.

رابطهٔ ۷ـ۱۷ یکی از انواع مختلف میانگینهای متحرک است که معمولاً برای هموارسازی به کار می‌رود. شاید مناسبتر آن باشد که برای میانگین‌گیری از مشاهدات همجوار به طریق «موزون» عمل شود. این نوع میانگین متحرک را «میانگین متحرک مرکزی موزون»[1] می‌نامند. در این روش بیشترین وزن به نقطهٔ مرکزی داده می‌شود و سپس به تناسب دورشدن مشاهدات از مرکز از وزن آنها کاسته می‌شود. برای مثال اگر پنج مشاهده برای میانگین گرفتن مورد نظر باشد، ممکن است به جای رابطهٔ ساده (۸ـ۱۷) از میانگین موزون زیر استفاده شود:

$$X_t^* = (X_{t-2} + 2X_{t-1} + 4X_t + 2X_{t+1} + X_{t+2}) / 10 \qquad (17\text{-}9)$$

در بسیاری از موارد، هدف از به کارگیری میانگین متحرک، هموارسازی

1. weighted centered moving average

نوسانات نامنظم است. به طوری که تغییرات سری زمانی در طول زمان به نحو منظم‌تری مشاهده شود. شاید بتوان گفت که میانگین متحرک موزون، به نحو بارزتری هموارسازی نوسانات تصادفی را فراهم می‌کند.

از مدلهای میانگین متحرک برای پیش‌بینی سریهایی که تغییرات نامنظم دارند، استفاده می‌شود. بعلاوه این نوع مدلها برای پیش‌بینی کوتاه مدت[1] به کارگرفته می‌شوند. در مدل میانگین متحرک، از مشاهدات موجود طی m دوره، میانگین گرفته می‌شود و از این میانگین برای پیش‌بینی مشاهدهٔ (مشاهدات) بعدی استفاده می‌شود. این رویه درست همانند رویکردی است که در رابطهٔ ۷-۱۷ بیان شد، با این تفاوت که هدف رابطهٔ ۷-۱۷ هموارسازی تغییرات نامنظم بود در حالی که در اینجا هدف پیش‌بینی آیندهٔ رفتار سری زمانی است. مدل پیش‌بینی میانگین متحرک براساس رابطهٔ ۱۰-۱۷ تعریف می‌شود:

$$\hat{X}_{t+1} = \frac{X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + \ldots + X_{t-m+1}}{m} \qquad (17\text{-}10)$$

از آنجا که از این مدل فقط برای سریهایی که فاقد روند و تغییرات فصلی هستند، استفاده می‌شود، پس پیش‌بینی براساس آن قابل تعمیم به یک دوره، دو دوره و یا حتی K دورهٔ جلوتر است.[2]

چنانچه پیش‌بینی براساس دو مشاهده (m = ۲) انجام گیرد، مدل میانگین متحرک را MA(۲) گویند و اگر پیش‌بینی براساس ۳ مشاهده انجام گیرد، مدل را MA(۳) گویند و الی آخر. انتخاب بهترین m برای میانگین‌گیری نیز براساس شاخصهای عمومی تعیین صحت تعریف می‌شود. آن مقداری از m که حداقل MAD یا MSE را ایجاد کند، به عنوان بهترین m در مدل میانگین متحرک انتخاب می‌شود.

مثال ۲-۱۷ داده‌های جدول ۳-۱۷ نشان‌دهندهٔ درآمد حاصل از فروش یک خرده‌فروش طی دو سال است.

---

1. short-term

۲. چنانچه از مدل میانگین متحرک برای پیش‌بینی در یک سری زمانی که روند یا تغییرات فصلی دارد، استفاده شود، روند آن ثابت و تغییرات فصلی آن نادیده گرفته می‌شود.

جدول ۱۷.۳ درآمد حاصل از فروش یک خرده فروش
(ارقام برحسب هزار تومان)

ماه (t)	سال اول	سال دوم
فروردین	۱۹/۳	۲۱/۸
اردیبهشت	۲۰/٦	۲۲/٥
خرداد	۱۸/٤	۲۱/٦
تیر	۱۷/٦	۱۹/۹
مرداد	۲۱/٥	۲۳/۷
شهریور	۲۷/۸	۲٤/۱
مهر	۲٦/۲	۲۸/٦
آبان	۲۷/۱	۳۰/۰
آذر	۲۳/۹	۲٥/۷
دی	۲٤/۰	۲٦/۱
بهمن	۲۲/۸	۲٥/۳
اسفند	۲٤/۰	۲۸/۸

الف) براساس روش میانگین متحرک، درآمد حاصل از فروش «یک دوره جلوتر»[1] را پیش‌بینی کنید. از فروردین ماه سال دوم شروع کنید، فرض کنید m=٥ باشد.

ب) براساس روش میانگین متحرک، درآمد حاصل از فروش «دو دوره جلوتر»[2] را پیش‌بینی کنید. از فروردین ماه سال دوم شروع کنید، فرض کنید m = ٥ باشد.

ج) از شاخص MAD استفاده کرده و پیش‌بینیهای بند الف و ب را با هم مقایسه کنید. کدام نوع پیش‌بینی (یک دوره جلوتر یا دو دوره جلوتر) واقعی‌تر است؟

اگر شاخص t بیانگر زمان (ماه) باشد (t = ۱,۲,...,۲٤)، پیش‌بینی را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\hat{X}_{t+۱} = \frac{X_t + X_{t-۱} + X_{t-۲} + X_{t-۳} + X_{t-٤}}{٥}$$

به ازای t = ۱۲ , ۱۳ , ... , ۲۳. بنابراین برای ماه فروردین از سال دوم (t = ۱۳)، داریم:

$$\hat{X}_{۱۳} = \frac{X_{۱۲} + X_{۱۱} + X_{۱۰} + X_{۹} + X_{۸}}{٥}$$

1. one-step-ahead
2. two-steps-ahead

$$= \frac{۲۴/۰ + ۲۲/۸ + ۲۴/۰ + ۲۳/۹ + ۲۷/۱}{۵} = ۲۴/۳۶$$

به طریق مشابه، پیش‌بینی یک دوره جلوتر برای اردیبهشت سال دوم ($t = ۱۴$) عبارت است از:

$$\hat{X}_{۱۴} = \frac{X_{۱۳} + X_{۱۲} + X_{۱۱} + X_{۱۰} + X_{۹}}{۵}$$
$$= \frac{۲۱/۸ + ۲۴/۰ + ۲۲/۸ + ۲۴/۰ + ۲۳/۹}{۵} = ۲۳/۳۰$$

نتایج محاسبات برای پیش‌بینی یک ماه جلوتر و دو ماه جلوتر طی سال دوم در جدول ۴ـ۱۷ آمده است.

جدول ۴ـ۱۷ پیش‌بینی یک ماه جلوتر و دو ماه جلوتر برای مثال ۲ـ۱۷ با استفاده از روش میانگین متحرک ($m = ۵$)

t	ماه	پیش‌بینی		فروش واقعی
		یک ماه جلوتر	دو ماه جلوتر	
۱۳	فروردین	۲۴/۳۶	۲۴/۸۰	۲۱/۸
۱۴	اردیبهشت	۲۳/۳۰	۲۴/۳۶	۲۲/۵
۱۵	خرداد	۲۳/۰۲	۲۳/۳۰	۲۱/۶
۱۶	تیر	۲۲/۵۴	۲۳/۰۲	۱۹/۹
۱۷	مرداد	۲۱/۹۶	۲۲/۵۴	۲۳/۷
۱۸	شهریور	۲۱/۹۰	۲۱/۹۶	۲۴/۱
۱۹	مهر	۲۲/۳۶	۲۱/۹۰	۲۸/۶
۲۰	آبان	۲۳/۵۸	۲۲/۳۶	۳۰/۰
۲۱	آذر	۲۵/۲۶	۲۳/۵۸	۲۵/۷
۲۲	دی	۲۶/۴۲	۲۵/۲۶	۲۶/۱
۲۳	بهمن	۲۶/۹۰	۲۶/۴۲	۲۵/۳
۲۴	اسفند	۲۷/۱۴	۲۶/۹۰	۲۸/۸

در تعریف یک مدل پیش‌بینی میانگین متحرک، پیش‌بینیهای دو دوره جلوتر درست همانند پیش‌بینیهای یک دوره جلوتر هستند. با این تفاوت که در مدل دو دوره جلوتر مقادیر پیش‌بینی به جای یک قدم، دو قدم جلوتر حرکت کرده‌اند. به همین دلیل است که مقادیر ذیل ستون دو ماه جلوتر در جدول ۴ـ۱۷ همانند مقادیر ذیل ستون

یک ماه جلوتر هستند با این تفاوت که مقادیر یک ماه جلوتر قرار گرفته‌اند. در ضمن در ستون دو ماه جلوتر عدد ۲۴/۸۰ میانگین مقادیر دوره ۱۱ و چهار دوره قبل از آن است.

شاخص MAD برای پیش‌بینیهای یک ماه جلوتر در سال دوم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

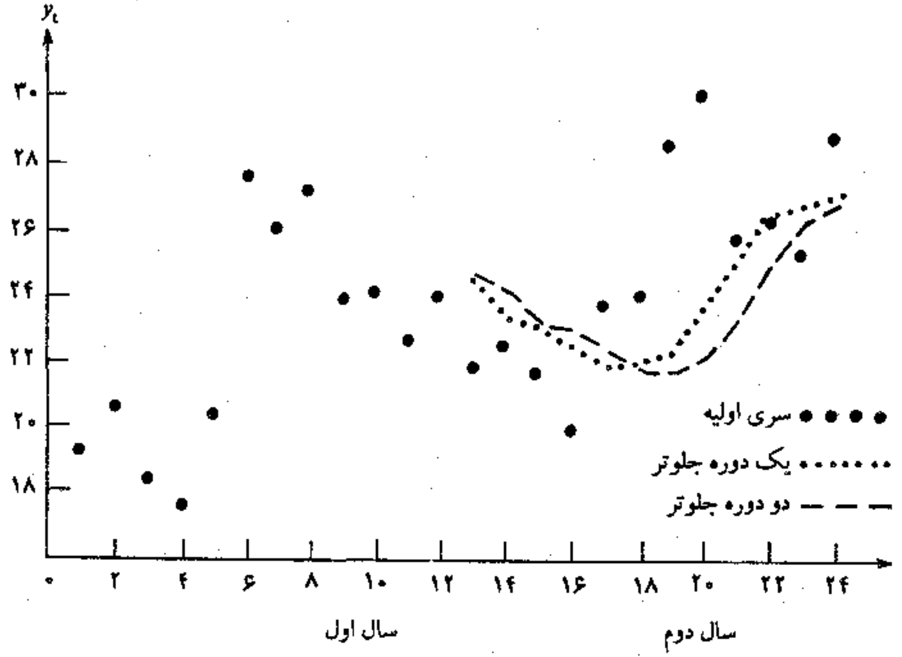
$$\text{MAD} = \frac{|۲۱/۸-۲۴/۳۶| + |۲۲/۵-۲۳/۳۰| + |۲۱/۶-۲۳/۰۲| + \ldots + |۲۸/۸-۲۷/۱۴|}{۱۲}$$

$$= ۲/۳۳۶۷$$

و برای پیش‌بینیهای دو ماه جلوتر عبارت است از:

$$\text{MAD} = \frac{|۲۱/۸-۲۴/۸۰| + |۲۲/۵-۲۴/۳۶| + |۲۱/۶-۲۳/۳۰| + \ldots + |۲۸/۸-۲۶/۹۰|}{۱۲}$$

$$= ۲/۷۷۵$$



شکل ۱۷.۷ فروش واقعی، پیش‌بینیهای یک دوره جلوتر و دو دوره جلوتر برای مثال ۲ـ۱۷

بنابراین، مدل پیش‌بینی میانگین متحرک براساس یک ماه جلوتر از مدل پیش‌بینی میانگین متحرک براساس دو ماه جلوتر بهتر است. چون MAD آن نسبتاً کوچکتر از مدل میانگین متحرک براساس دو ماه جلوتر می‌باشد.

برای مقایسهٔ بهتر مشاهدات واقعی سری زمانی با نتایج مدلهای به کارگرفته، شکل ۷ـ۱۷ را در نظر بگیرید. مدل (۵) MA در هر دو مدل بخوبی نوسانات نامنظم مشاهدات واقعی را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر (۵) MA رفتار سری زمانی را بخوبی تبیین کرده است.

تمرین

۱. در چه صورتی استفاده از مدل پیش‌بینی میانگین متحرک مفید است؟

۲. مقادیر یک سری زمانی در جدول داده شده است:

t	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰
X_t	۹	۱۰	۱۲	۱۱	۱٥	۱٥	۱۷	۱۹	۲۱	۲۰

الف) با استفاده از روش میانگین متحرک و $m = ۳$ از زمان $t = ٥$ تا $t = ۱۰$، مقادیر پیش‌بینی را براساس یک دوره جلوتر محاسبه کنید.

ب) با استفاده از روش میانگین متحرک و $m=۳$ از زمان $t=٥$ تا $t=۱۰$، مقادیر پیش‌بینی را براساس دو دوره جلوتر محاسبه کنید.

ج) شاخص MAD را برای دو مجموعهٔ به دست آمده در بند الف و ب محاسبه کنید. توضیح دهید کدام روش پیش‌بینی از صحت بالاتری برخوردار است؟

۳. داده‌های زیر بیانگر تعداد تقاضای کامپیوترهای شخصی طی یک دوره پنج ماهه است که توسط مدیر فروش جمع‌آوری شده است:

ماه	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد
تقاضا	۸۰	۱۰۲	٥۸	۸۰	۹۱

الف) با استفاده از روش میانگین متحرک، تقاضای ماه شهریور را پیش‌بینی کنید. فرض کنید $m = ۳$ است.

ب) اگر تقاضای واقعی ماه شهریور ۱۰۰ دستگاه کامپیوتر باشد، با استفاده از روش میانگین متحرک براساس یک ماه جلوتر تقاضای ماه مهر را پیش‌بینی کنید. فرض کنید $m = ۳$ است.

ج) با استفاده از روش میانگین متحرک براساس دو دوره جلوتر تقاضای ماه مهر را پیش‌بینی کنید. فرض کنید $m = ۳$ است.

۱۷-۳-۳ مدل نمو هموار ساده

در بسیاری از موارد از مدل «نمو هموار ساده»[1] برای پیش‌بینی مقادیر آیندهٔ سری زمانی استفاده می‌شود. این روش، یکی از ساده‌ترین روشهای پیش‌بینی است که مبنایی برای دیگر مدلهای پیش‌بینی می‌باشد. روش نمو هموار، برای آن دسته از سریهای زمانی مفید است که تغییرات فصلی و دوره‌ای در آن مورد نظر نباشند.

به کمک نمو هموار می‌توان مقادیر پیش‌بینی هریک از مقادیر فعلی سری زمانی را برآورد کرد، سپس آنها را به عنوان مبنایی برای پیش‌بینی مقادیر آینده قرار داد. در صورتی که سری زمانی از تغییرات منظمی برخوردار باشد، استفاده از این مدل مفید خواهد بود. در این مدل به نوعی از تمامی مقادیر سری زمانی برای پیش‌بینی رفتار بعدی استفاده می‌شود. در واقع در زمان t به کلیهٔ مشاهدات سری زمانی در گذشته؛ X_n، X_{n-1}، ...، $X_۲$ و $X_۱$، توجه داریم تا بتوانیم مقادیر بعدی را پیش‌بینی کنیم.

روش نمو هموار ساده، یک نوع پیش‌بینی را براساس میانگین موزون از مقادیر جاری و گذشته ارائه می‌دهد. در شکل‌گیری این میانگین، بیشترین وزن به جدیدترین مشاهده، وزن کمتر به مشاهدهٔ قبل از آن و الی آخر داده می‌شود. به طوری که کمترین وزن به قدیمی‌ترین مشاهده از سری زمانی، $X_۱$، داده می‌شود. روش معمول برای تحقق این ایده، برآورد مشاهده در زمان n با استفاده از $\bar{X}_n$ است؛ یعنی:

$$\bar{X}_n = (۱-\alpha) X_n + \alpha (۱-\alpha) X_{n-۱} + \alpha^۲ (۱-\alpha) X_{n-۲} + \dots \quad (۱۷\text{-}۱۱)$$

در رابطه ۱۷-۱۱، α هر مقداری بین ۰ و ۱ است؛ برای مثال اگر α را ۰/۵۰ درنظر بگیریم، مقدار پیش‌بینی در زمان n مساوی است با:

$$\bar{X}_n = ۰/۵۰ X_n + ۰/۲۵ X_{n-۱} + ۰/۱۲۵ X_{n-۲} + \dots$$

بنابراین یک نوع میانگین وزنی (با وزنهای نزولی برای مشاهدات قدیمی‌تر) برای

1. simple exponential smoothing

محاسبهٔ مقادیر پیش‌بینی به کار گرفته می‌شود.

با قراردادن t در معادلهٔ ۱۱ـ۱۷ به جای n می‌توان داشت:

$$\bar{X}_t = (1-\alpha) X_t + \alpha (1-\alpha) X_{t-1} + \alpha^2 (1-\alpha) X_{t-2} + \ldots \qquad (۱۷\text{ـ}۱۲)$$

به طریق مشابه، مقدار پیش‌بینی در دوره ۱ −t را با استفاده از رابطه زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$\bar{X}_{t-1} = (1-\alpha) X_{t-1} + \alpha (1-\alpha) X_{t-2} + \alpha^2 (1-\alpha) X_{t-3} + \ldots \qquad (۱۷\text{ـ}۱۳)$$

با ضرب طرفین رابطه ۱۳ـ۱۷ در α خواهیم داشت:

$$\alpha \bar{X}_{t-1} = \alpha (1-\alpha) X_{t-1} + \alpha^2 (1-\alpha) X_{t-2} + \alpha^3 (1-\alpha) X_{t-3} + \ldots \qquad (۱۷\text{ـ}۱۴)$$

بنابراین با تفریق معادلهٔ ۱۴ـ۱۷ از معادلهٔ ۱۲ـ۱۷ داریم:

$$\bar{X}_t - \alpha \bar{X}_{t-1} = (1-\alpha) X_t$$

یا:

$$\bar{X}_t = \alpha \bar{X}_{t-1} + (1-\alpha) X_t \quad , \quad (0<\alpha<1) \qquad (۱۷\text{ـ}۱۵)$$

رابطهٔ ۱۵ـ۱۷ یک رابطهٔ برگشتی برای برآورد X_t خواهد بود. طبق این رابطه، $\bar{X}_t$ براساس میانگین موزونِ مقدار پیش‌بینی شده در زمان $t-1$، $\bar{X}_{t-1}$، و مشاهدهٔ واقعی سری زمانی در زمان t، X_t، بیان می‌گردد. مقدار α را «ضریب هموارسازی» گویند که مقدار آن بر مقادیر پیش‌بینی تأثیر خواهد گذاشت.

مراحل استفاده از روش نمو هموار ساده به طور خلاصه عبارت است از:

۱. سری هموارشدهٔ $\bar{X}_t$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{X}_1 = X_1$$

$$\bar{X}_t = \alpha \bar{X}_{t-1} + (1-\alpha) X_t \qquad (0<\alpha<1\ ;\ t=2,3,\ldots,n)$$

۲. با رسیدن به زمان n، مقادیر آینده، X_{n+h}، با استفاده از رابطهٔ زیر پیش‌بینی می‌شود:

$$\hat{X}_{n+h} = \bar{X}_n \qquad (h = 1,2,3,\ldots)$$

مثال ۳ـ۱۷ چگونگی استفاده از مدل نمو هموار ساده را برای پیش‌بینی نشان می‌دهد.

مثال ۱۷ـ۳ فروش شرکت ایران دارو را در جدول ۱ـ۱۷ در نظر گرفته، با استفاده از ضریب نمو هموار، $\alpha = ۰/۴۰$، فروش شش سال بعد را پیش‌بینی کنید.

با $\bar{X}_1 = X_1 = ۱۸۰۶$ شروع می‌کنیم. بنابراین با استفاده از $\alpha = ۰/۴۰$ و معادلهٔ ۱۵ـ۱۷ می‌توان نوشت:

$$\bar{X}_t = ۰/۴۰\, \bar{X}_{t-1} + ۰/۶۰\, X_t$$

بنابراین داریم:

$$\bar{X}_2 = ۰/۴۰\, \bar{X}_1 + ۰/۶۰\, X_2$$

$$= ۰/۴۰\,(۱۸۰۶) + (۰/۶۰)(۱۶۴۴) = ۱۷۰۸/۸$$

به طریق مشابه:

$$\bar{X}_3 = ۰/۴۰\, \bar{X}_2 + ۰/۶۰\, X_3$$

$$= (۰/۴۰)(۱۷۰۸/۸) + (۰/۶۰)(۱۸۱۴) = ۱۷۷۱/۹$$

با ادامه دادن مراحل روش نمو هموار ساده می‌توان ستون $\bar{X}_t$ را در جدول ۵ـ۱۷ کامل کرد. می‌بینیم که مقدار پیش‌بینی برای سال سی‌ام مساوی است با:

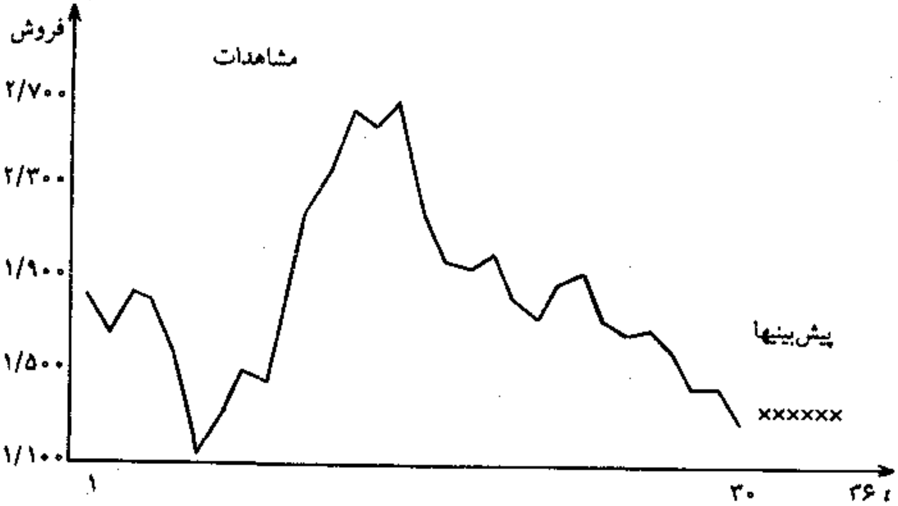
$$\bar{X}_n = \bar{X}_{30} = ۱۳۴۲/۶$$

این مقدار به عنوان مقدار پیش‌بینی شده برای فروش در تمام سالهای بعدی استفاده می‌شود. سری مشاهده شده و مقادیر پیش‌بینی شده در شکل ۸ـ۱۷ نمایش داده شده‌اند.

سؤال اساسی در روش نمو هموار این است که «مقدار α چقدر باید باشد؟» واقعیت این است که مقدار مناسب با «تجزیه و تحلیل حساسیت» و بررسی مقدار MSE در سطح مختلف α تعریف‌پذیر است. هر مقدار ویژه‌ای از α که کمترین MSE را داشته باشد، آن مقدار α برای پیش‌بینی مقادیر آینده انتخاب می‌شود.

جدول ۱۷.۵ مقادیر پیش‌بینی شدهٔ فروش برای سی‌سال گذشته شرکت ایران دارو

t	X_t	$\bar{X}_t$	t	X_t	$\bar{X}_t$
۱	۱۸۰۶	۱۸۰۶/۰	۱۶	۲۱۷۷	۲۳۳۶/۵
۲	۱۶۴۴	۱۷۰۸/۸	۱۷	۱۹۲۰	۲۰۸۶/۶
۳	۱۸۱۴	۱۷۷۱/۹	۱۸	۱۹۱۰	۱۹۸۰/۶
۴	۱۷۷۰	۱۷۷۰/۸	۱۹	۱۹۸۴	۱۹۸۲/۶
۵	۱۵۱۸	۱۶۱۹/۱	۲۰	۱۷۸۷	۱۸۶۵/۲
۶	۱۱۰۳	۱۳۰۹/۴	۲۱	۱۶۸۹	۱۷۵۹/۵
۷	۱۲۶۶	۱۲۸۳/۴	۲۲	۱۸۶۶	۱۸۲۳/۴
۸	۱۴۷۳	۱۳۹۷/۲	۲۳	۱۸۹۶	۱۸۶۷/۰
۹	۱۴۲۳	۱۴۱۲/۷	۲۴	۱۶۸۴	۱۷۵۷/۲
۱۰	۱۷۶۷	۱۶۲۵/۳	۲۵	۱۶۳۳	۱۶۸۲/۷
۱۱	۲۱۶۱	۱۹۴۶/۷	۲۶	۱۶۵۷	۱۶۶۷/۳
۱۲	۲۳۳۶	۲۱۸۰/۳	۲۷	۱۵۶۹	۱۶۰۸/۳
۱۳	۲۶۰۲	۲۴۳۳/۳	۲۸	۱۳۹۰	۱۴۷۷/۳
۱۴	۲۵۱۸	۲۴۸۴/۱	۲۹	۱۳۸۷	۱۴۲۳/۱
۱۵	۲۶۳۷	۲۵۷۵/۸	۳۰	۱۲۸۹	۱۳۴۲/۶



شکل ۱۷.۸ فروش شرکت ایران دارو و پیش‌بینیهای آینده براساس مدل نمو هموار ساده

بین α و n (تعداد مشاهدات جمع‌آوری شده) یک رابطهٔ تقریبی به صورت زیر وجود دارد:

$$\alpha = \frac{۲}{n+۱} \qquad (۱۷\text{-}۱۶)$$

در رابطهٔ ۱۶-۱۷ فرض بر این بوده است که تحلیلگر با استفاده از α کم ($\alpha = ۰/۱۰$) اطلاعات حداکثر ۱۹ دوره و همچنین با استفاده از α زیاد ($\alpha = ۰/۵۰$) اطلاعات حداکثر ۳ دوره را در برآورد دورهٔ آینده لازم می‌داند. بنابراین اگر تحلیلگر با توجه به تجربیات گذشته خود از α کم استفاده می‌کند و مشاهدات مورد نیاز را نتواند برای تشکیل سری زمانی تهیه کند، نمی‌تواند از رابطهٔ ۱۶-۱۷ استفاده نماید.

۱۷-۳-۴ مدل نمو هموار هُلت ـ وینترز

در این بخش ما یکی دیگر از روشهای نمو هموار را که به «مدل پیش‌بینی هُلت ـ وینترز»[1] معروف است، توضیح خواهیم داد. با استفاده از این مدل به پیش‌بینی مقادیر بعدی در سریهایی که تغییرات فصلی و روند دارند، خواهیم پرداخت. مدل هُلت ـ وینترز در دو شرایط مجزا توسعه‌پذیر است؛ یعنی هم دارای یک مدل مجزا برای پیش‌بینی در سریهایی است که تغییرات غیرفصلی دارند و هم توسعه‌پذیر به سریهایی است که تغییرات فصلی دارند. در اینجا هر دو مدل بتفصیل توضیح داده می‌شوند.

۱۷-۳-۴-۱ مدل پیش‌بینی نمو هموار هُلت ـ وینترز برای سریهایی که روند دارند

اگر مقدار مشاهده شده برای سری زمانی در زمان t، با X_t نشان داده شود، می‌توان گفت که $\bar{X}_t$ بیانگر مقدار پیش‌بینی آن خواهد بود. بنابراین روند برآورد شده را با T_t معرفی می‌کنیم. اصل اساسی برای برآورد این دو مقدار؛ $\bar{X}_t$ و T_t، مشابه چیزی است که در فرایند محاسبه نمو هموار ساده بیان شد. در این مدل، دو معادلهٔ برآورد عبارتند از:

$$\bar{X}_t = A(\bar{X}_{t-۱} + T_{t-۱}) + (۱-A)X_t \qquad (۰<A<۱) \qquad (۱۷\text{-}۱۷)$$

$$T_t = B\,T_{t-۱} + (۱-B)(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-۱}) \qquad (۰<B<۱) \qquad (۱۷\text{-}۱۸)$$

در معادلات فوق A و B ضرایب هموارسازی هستند که مقدار آنها همواره بین ۰ و ۱ خواهد بود. برای استفاده از روابط ۱۷-۱۷ و ۱۸-۱۷ علاوه بر مقادیر A و B به مقدار واقعی سری زمانی در زمان t، مقدار پیش‌بینی در زمان $t-۱$، مقدار پیش‌بینی در زمان t

1. The Holet-Winters exponential smoothing forecasting model

و مقدار روند در زمان ۱ −t، T_{t-1}، نیاز ضروری داریم. مراحل استفاده از مدل هُلت ـ وینترز در سریهای غیرفصلی به طور خلاصه به شرح زیر است:

۱. برآوردهای $\bar{X}_t$ و T_t به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{X}_2 = X_2 \quad , \quad T_2 = X_2 - X_1$$

$$\bar{X}_t = A(\bar{X}_{t-1} + T_{t-1}) + (1-A)X_t \quad ، \quad (0<A<1\ ;\ t = 3,4,\dots,n)$$

$$T_t = BT_{t-1} + (1-B)\ (\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) \quad ، \quad (0<B<1\ ;\ t = 3,4,\dots,n)$$

۲. با رسیدن به زمان n، مقادیر مورد نیاز آینده، X_{n+h}، به صورت زیر پیش‌بینی می‌شود:

$$\hat{X}_{n+h} = \bar{X}_n + hT_n \quad ، \quad (h = 1,2,3,\dots)$$

حال مراحل فوق با استفاده از داده‌های مثال ۴ـ۱۷ بیشتر تشریح می‌شوند.

مثال ۴ـ۱۷ جدول زیر نشان‌دهندهٔ جمعیت روستاییان یک منطقهٔ کشور طی سیزده سال است. مشاهدات واقعی با X_t نشان داده‌شده‌اند (X_t بیانگر جمعیت روستاییان منطقه به هزار نفر است). t نیز شمارهٔ سال است که از ۱ تا ۱۳ می‌باشد.

جدول ۶ـ۱۷ آمار جمعیت روستاییان منطقه در سیزده سال گذشته

t	X_t	t	X_t
۱	۵۰/۷۴	۸	۴۶/۶۴
۲	۵۰/۴۳	۹	۴۵/۹۵
۳	۵۰/۰۵	۱۰	۴۵/۲۰
۴	۴۹/۷۹	۱۱	۴۴/۷۴
۵	۴۹/۴۸	۱۲	۴۴/۲۳
۶	۴۸/۷۲	۱۳	۴۳/۹۲
۷	۴۷/۶۴		

با استفاده از ضرایب هموارسازی ۰/۳۰ = A و ۰/۴۰ = B به پیش‌بینی جمعیت روستاییان منطقهٔ مورد نظر در سالهای ۱۴ تا ۱۷ خواهیم پرداخت. براین اساس روابط ۱۷ـ۱۷ و ۱۸ـ۱۷ به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$\bar{X}_t = 0/30\,(\bar{X}_{t-1} + T_{t-1}) + 0/70X_t \qquad (۱۷\text{ـ}۱۹)$$

$$T_t = ۰/۴۰\, T_{t-1} + ۰/۶۰\, (\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) \qquad (۱۷\text{-}۲۰)$$

برآوردهای اولیه و مبنایی برای $\bar{X}_t$ و T_t عبارتند از:

$$\bar{X}_۲ = X_۲ = ۵۰/۴۳$$

و:

$$T_۲ = X_۲ - X_۱ = ۵۰/۴۳ - ۵۰/۷۴ = -۰/۳۱$$

از رابطهٔ ۱۷-۱۹ برای $t = ۳$ داریم:

$$\bar{X}_۳ = ۰/۳۰\, (\bar{X}_۲ + T_۲) + ۰/۷۰ X_۳ = ۰/۳۰\, (۵۰/۴۳ - ۰/۳۱) + ۰/۷۰\, (۵۰/۰۵)$$

$$= ۵۰/۰۷۱$$

و از رابطهٔ ۱۷-۲۰ داریم:

$$T_۳ = ۰/۴۰\, T_۲ + ۰/۶۰\, (\bar{X}_۳ - \bar{X}_۲) = ۰/۴۰\, (-۰/۳۱) + (۰/۶۰)\, (۵۰/۰۷۱ - ۵۰/۴۳)$$

$$= -۰/۳۳۹۴$$

تمامی محاسبات براساس روابط ۱۷-۱۹ و ۱۷-۲۰ انجام گرفته است و نتایج با دو رقم اعشار در جدول ۱۷-۷ ذیل ستونهای $\bar{X}_t$ و T_t آمده است.

جدول ۱۷.۷ محاسبات مدل هُلت ـ وینترز برای جمعیت روستاییان منطقه ($A = ۰/۳۰$, $B = ۰/۴۰$)

t	X_t	$\bar{X}_t$	T_t	t	X_t	$\bar{X}_t$	T_t
۱	۵۰/۷۴	–	–	۸	۴۶/۶۴	۴۶/۷۷	−۰/۹۷
۲	۵۰/۴۳	۵۰/۴۳	−۰/۳۱	۹	۴۵/۹۵	۴۵/۹۰	−۰/۹۱
۳	۵۰/۰۵	۵۰/۰۷	−۰/۳۴	۱۰	۴۵/۲۰	۴۵/۱۴	−۰/۸۲
۴	۴۹/۷۹	۴۹/۷۷	−۰/۳۱	۱۱	۴۴/۷۴	۴۴/۶۱	−۰/۶۴
۵	۴۹/۴۸	۴۹/۴۷	−۰/۳۱	۱۲	۴۴/۲۳	۴۴/۱۵	−۰/۵۳
۶	۴۸/۷۲	۴۸/۸۵	−۰/۴۹	۱۳	۴۳/۹۲	۴۳/۸۳	−۰/۴۱
۷	۴۷/۶۴	۴۷/۸۶	−۰/۸۰				

حال به چگونگی استفاده از مقادیر $\bar{X}_t$ و T_t برای پیش‌بینی مقادیر آینده می‌پردازیم. فرض کنید برای یک سری زمانی، $X_۱$، $X_۲$ و ... و X_n مشاهدات واقعی بوده و $\bar{X}_n$ و T_n مقادیر برآوردشدهٔ X_n و روند باشند. در تولید مقادیر پیش‌بینی آینده، فرض

می‌شود که آخرین روند به دست آمده همچنان برای جدیدترین سطح برآورد شده، $\bar{X}_n$، تداوم خواهد داشت. بنابراین اولین مقدار پیش‌بینی، $\hat{X}_{n+1}$، عبارت است از:

$$\hat{X}_{n+1} = \bar{X}_n + T_n$$

و مقدار بعد از آن خواهد بود:

$$\hat{X}_{n+2} = \bar{X}_n + 2T_n$$

به طور کلی؛ اگر در زمان n باشیم و دوره زمانی آینده را h فرض کنیم، می‌توانیم مقادیر پیش‌بینی را برای X_{n+h} به صورت زیر برآورد کنیم:

$$\hat{X}_{n+h} = \bar{X}_n + hT_n$$

با مراجعه به جدول ۷ـ۱۷ خواهیم داشت: $\bar{X}_{13} = ۴۳/۸۳$ و $T_{13} = -۰/۴۱$. بنابراین پیش‌بینی تعداد روستاییان منطقه در سالهای ۱۴ ، ۱۵ و ۱۶ عبارت خواهد بود:

$$\hat{X}_{14} = ۴۳/۸۳ + ۱(-۰/۴۱) = ۴۳/۴۲$$

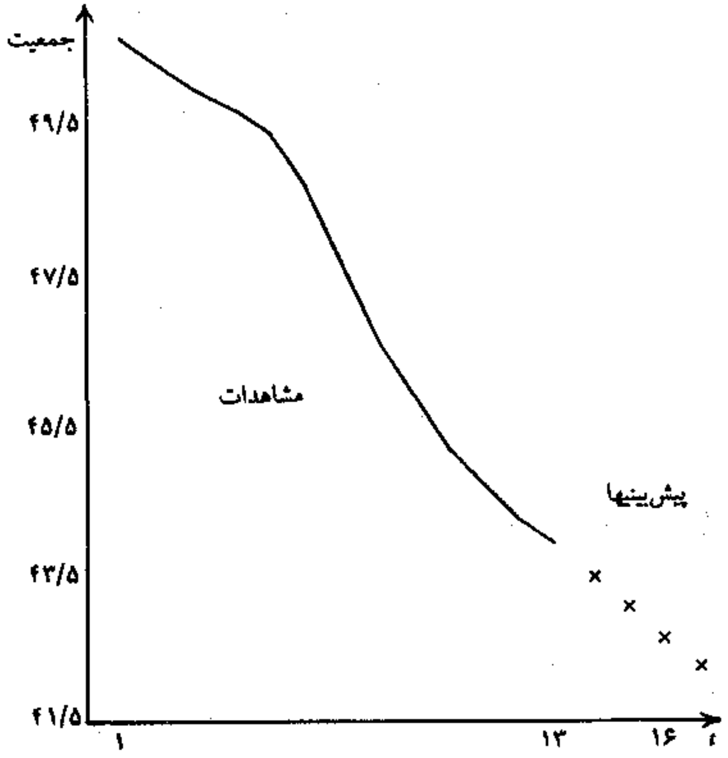
$$\hat{X}_{15} = ۴۳/۸۳ + ۲(-۰/۴۱) = ۴۳/۰۱$$

$$\hat{X}_{16} = ۴۳/۸۳ + ۳(-۰/۴۱) = ۴۲/۶۰$$

شکل ۹ـ۱۷ مشاهدات واقعی سری زمانی جمعیت روستاییان منطقه و مقادیر پیش‌بینی شده در سالهای بعدی را نشان می‌دهد. چنانکه از رفتار سری زمانی پیداست، تغییرات فصل وجود ندارد، ولی سری زمانی «روند نزولی» دارد. این روند همچنان در مقادیر پیش‌بینی با استفاده از مدل غیرفصلی هُلت ـ وینترز دیده می‌شود.

۲ـ۴ـ۳ـ۱۷ مدل پیش‌بینی نمو هموار هُلت ـ وینترز برای سریهای زمانی با تغییرات فصلی

در این بخش روش هُلت ـ وینترز را به گونه‌ای توسعه می‌دهیم که قابل استفاده برای پیش‌بینی در سریهای زمانی فصلی باشد. در مباحث قبل X_t ، $\bar{X}_t$ و T_t به ترتیب مقدار مشاهده شده، سطح پیش‌بینی شده برای مقدار واقعی سری زمان در لحظه t و روند برآوردشده در سری زمانی غیرفصلی هستند. در اینجا علاوه بر آنها به عامل فصلی F_t نیز



شکل ۱۷.۹ نمودار سری زمانی جمعیت روستاییان منطقه و مقادیر پیش‌بینی‌شده براساس مدل غیرفصلی هُلت ـ وینترز

باید توجه داشت. بنابراین اگر یک سری زمانی S دوره زمانی در هر سال داشته باشد، عامل فصلی مرتبط با آن در سال قبل با F_{t-s} نشان داده می‌شود.

در مدل هُلت ـ وینترز، برآورد سطح مورد نظر، روند و تغییرات فصلی با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\bar{X}_t = A(\bar{X}_{t-1} + T_{t-1}) + (1-A)\frac{X_t}{F_{t-s}} \qquad (0<A<1) \qquad (17\text{-}21)$$

$$T_t = BT_{t-1} + (1-B)(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) \qquad (0<B<1) \qquad (17\text{-}22)$$

$$F_t = CF_{t-s} + (1-C)\frac{X_t}{\bar{X}_t} \qquad (0<C<1) \qquad (17\text{-}23)$$

در روابط فوق A ، B و C همگی ضرایب هموارسازی هستند که مقدار آنها همواره بین

۰ و ۱ خواهد بود. در رابطه ۲۱-۱۷، عبارت ($\bar{X}_{t-1} + T_{t-1}$) معرف یک مقدار برآوردی در زمان t است که مقدار آن را در زمان t شکل می‌دهد. با وجود این باید تأثیر تغییرات فصلی را با تقسیم کردن مقدار واقعی مشاهده در زمان t، X_t، بر تغییرات فصلی برای آن دوره (F_{t-s}) خارج کنیم. به عبارت دیگر $\frac{X_t}{F_{t-s}}$ بیانگر حذف عامل فصلی از سطح مورد تخمین می‌باشد. اندازه گیری تغییرات روند در معادلهٔ ۲۲-۱۷ درست همانند معادلات قبلی است که بدون در نظرگرفتن تغییرات فصلی تعریف شده است. در نهایت عامل تغییرات فصلی را با استفاده از رابطه ۲۳-۱۷ می‌توان اندازه گیری کرد. بیشترین عامل مؤثر، تغییرات حاصل شده از سال قبل، F_{t-s}، است. همچنین تقسیم مقدار مشاهده شدهٔ X_t بر مقدار برآورد شدهٔ آن $\bar{X}_t$ بیانگر یک عامل در آن دوره است که به نحوی در رابطه ۲۳-۱۷ آورده شده است. بنابراین برآورد جدید عامل فصلی (F_t) میانگین موزون از این دو مقدار خواهد بود.

فرض کنید X_1، X_2، ... و X_n دنبالهٔ سری زمانی فصلی با S دوره باشد (اگر $S = 4$ باشد، داده‌ها به صورت فصلی تعریف می‌شوند و اگر $S = 12$ باشد، داده‌ها ماهانه خواهند بود). روش هُلت ـ وینترز در چنین سری زمانی این مراحل را خواهد داشت:

۱. برآوردهای اولیه را از سطح، روند و فصل باید به دست آورد. این عوامل با استفاده از روش میانگین متحرک به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{X}_t = \frac{X_{t-(\frac{S}{2})} + 2\left(X_{t-(\frac{S}{2})+1} + \dots + X_{t-(\frac{S}{2})-1}\right) + X_{t+\frac{S}{2}}}{2S}$$

به ازای: $t = (\frac{S}{2})+1$ ، $(\frac{S}{2})+2$ ، ... ، $(\frac{5S}{2})$.

$\bar{X}_{(\frac{5S}{2})}$ برآورد شده بیانگر اولین سطح برآوردی مورد نیاز می‌باشد. روند دراین دوره به صورت زیر برآورد خواهد شد:

$$T_{(\frac{5S}{2})} = \bar{X}_{(\frac{5S}{2})} - \bar{X}_{(\frac{5S}{2})-1}$$

برآوردهای اولیه از عوامل فصلی با استفاده از رابطهٔ زیر فراهم می‌شوند:

$$F_{(\frac{۵S}{۲})-j}=\frac{۱}{۲}\left[\frac{X_{(\frac{۵S}{۲})-j}}{\bar{X}_{(\frac{۵S}{۲})-j}}+\frac{X_{(\frac{۳S}{۲})-j}}{\bar{X}_{(\frac{۳S}{۲})-j}}\right] \qquad (j=۰,۱,۲,...,S-۱)$$

۲. با شروع از دوره $[(\frac{۵S}{۲})+۱]$ داده‌های به دست آمده را در روابط زیر به کار بگیرید:

$$\bar{X}_t=A(\bar{X}_{t-۱}+T_{t-۱})+(۱-A)\frac{X_t}{F_{t-s}} \qquad (۰<A<۱)$$

$$T_t=BT_{t-۱}+(۱-B)(\bar{X}_t-\bar{X}_{t-۱}) \qquad (۰<B<۱)$$

$$F_t=CF_{t-s}+(۱-C)\frac{X_t}{\bar{X}_t} \qquad (۰<C<۱)$$

به ازای $t=(\frac{۵S}{۲})+۱,...,n$.

۳. با رسیدن به زمان n ، می‌توان مقادیر آینده، X_{n+h} ، را از سری زمانی به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\hat{X}_{n+h}=(\bar{X}_n+hT_n)F_{n+h-S} \qquad (h=۱,۲,...,S)$$

$$=(\bar{X}_n+hT_n)F_{n+h-۲S} \qquad (h=S+۱,S+۲,...,۲S)$$

حال برای درک بهتر مراحل روش هُلت ـ وینترز فصلی به ذکر یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۵ـ۱۷ جدول زیر نشان‌دهندهٔ عایدی هر سهم شرکت ایران دوچرخ در چهار فصل طی هشت‌سال است. با استفاده از ضرایب؛ $A=۰/۵$ ، $B=۰/۵$ و $C=۰/۳$ مقادیر پیش‌بینی را برای $t=۳۳,۳۴,...,۴۰$ محاسبه کنید.

جدول ۸ـ۱۷ عایدی هر سهم شرکت ایران دوچرخ برحسب سال و فصل

فصل / سال	۱	۲	۳	٤
۱	۰/۳۰۰	۰/٤٦۰	۰/۳٤۵	۰/۹۱۰
۲	۰/۳۳۰	۰/۵٤۵	۰/٤٤۰	۱/۰٤۰
۳	۰/٤۹۵	۰/٦۸۰	۰/۵٤۵	۱/۲۸۵
٤	۰/۵۵۰	۰/۸۷۰	۰/٦٦۰	۱/۵۸۰
۵	۰/۵۹۰	۰/۹۹۰	۰/۸۳۰	۱/۷۳۰
٦	۰/٦۱۰	۱/۰۵۰	۰/۹۲۰	۲/۰٤۰
۷	۰/۷۰۰	۱/۲۳۰	۱/۰٦۰	۲/۳۲۰
۸	۰/۸۲۰	۱/٤۱۰	۱/۲۵۰	۲/۷۳۰

شروع محاسبات را با به دست آوردن ستون $\bar{X}_t$ آغاز می‌کنیم. مقادیر $\bar{X}_t$ با استفاده از روش میانگین متحرک مرکزی ساده برای S نقطه برآورد می‌شوند. به عنوان نمونه؛

$$\bar{X}_{۳} = \frac{X_{۱} + ۲(X_{۲} + X_{۳} + X_{۴}) + X_{۵}}{۲(۴)}$$

$$= \frac{۰/۳۰۰ + ۲(۰/۴۶۰ + ۰/۳۴۵ + ۰/۹۱۰) + ۰/۳۳۰}{۲(۴)} = ۰/۵۰۷۵$$

مقادیر محاسبه شده در ستونی با عنوان $\bar{X}_t$ در جدول ۹ـ۱۷ نشان داده شده است. مقدار $\bar{X}_t$ همچنان که گفته شد بر مبنای میانگینهای متحرک مرکزی ساده برای چهار نقطهٔ همجوار محاسبه شده‌اند.

در مثال ۵ـ۱۷ ما اختصاصاً $\bar{X}_{۱۰}$ را نیاز داریم؛ یعنی $\bar{X}_{۱۰} = ۰/۷۲۰۶$. روند در این دوره می‌تواند با تفاضل سطوح برآورد شدهٔ دوره‌های ۱۰ و ۹ به دست آید؛ یعنی:

$$T_{۱۰} = \bar{X}_{۱۰} - \bar{X}_{۹} = ۰/۷۲۰۶ - ۰/۶۷۶۹ = ۰/۰۴۳۷$$

حال می‌توان تغییرات فصلی را نیز با استفاده از رابطهٔ تعریف شده در مرحله الف به دست آورد و آنها را با عنوان F_t نشان داد؛ برای مثال ما از دورهٔ ۳، عامل $\frac{۰/۳۴۵}{۰/۵۰۷۵}$ و از دوره ۷ عامل $\frac{۰/۴۴۰}{۰/۶۰۹۴}$ را داریم. بنابراین تخمین اولیه ما از عامل تغییرات فصلی در فصل سوم، میانگین این دو تخمین خواهد بود که عبارت است از:

$$F_{۷} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۰/۳۴۵}{۰/۵۰۷۵} + \frac{۰/۴۴۰}{۰/۶۰۹۴}\right] = ۰/۷۰۱$$

همچنین برای دیگر فصول داریم:

$$F_{۸} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۰/۹۱۰}{۰/۵۲۱۹} + \frac{۱/۰۴۰}{۰/۶۴۶۹}\right] = ۱/۶۷۶$$

$$F_{۹} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۰/۳۳۰}{۰/۵۴۴۴} + \frac{۰/۴۹۵}{۰/۶۷۶۹}\right] = ۰/۶۶۹$$

$$F_{۱۰} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۰/۵۴۵}{۰/۵۷۲۵} + \frac{۰/۶۸۰}{۰/۷۲۰۶}\right] = ۰/۹۴۸$$

با در اختیار داشتن برآوردهای اولیهٔ فوق، سایر مقادیر را می‌توان براحتی محاسبه کرد.

اگر مقادیر A ، B و C را در روابط ۲۱-۱۷ تا ۲۳-۱۷ جایگذاری کنیم، روابط ۲٤-۱۷ تا ۲٦-۱۷ به شرح زیر پدید می‌آید:

$$\bar{X}_t = ۰/۵(\bar{X}_{t-1} + T_{t-1}) + ۰/۵۰(\frac{X_t}{F_{t-4}}) \qquad (۱۷\text{-}۲٤)$$

$$T_t = ۰/۵۰\,T_{t-1} + ۰/۵(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) \qquad (۱۷\text{-}۲۵)$$

$$F_t = ۰/۳F_{t-4} + ۰/۷(\frac{X_t}{\bar{X}_t}) \qquad (۱۷\text{-}۲٦)$$

حال فرمولهای فوق را برای ...,۱۱,۱۲ = t به کار می‌گیریم؛ برای مثال برای دوره ۱۱ از معادلهٔ ۲٤-۱۷ داریم:

$$\bar{X}_{11} = ۰/۵(\bar{X}_{10} + T_{10}) + ۰/۵(\frac{X_{11}}{F_7})$$
$$= ۰/۵(۰/۷۲۰٦ + ۰/۰٤۳۷) + ۰/۵(\frac{۰/۵٤۵}{۰/۷۰۱}) = ۰/۷۷۰۹$$

بعلاوه از معادلهٔ ۲۵-۱۷ می‌توانیم عامل روند را به صورت زیر برای دوره ۱۱ محاسبه کنیم.

$$T_{11} = ۰/۵(۰/۰٤۳۷) + ۰/۵(۰/۷۷۰۹ - ۰/۷۲۰٦) = ۰/۰٤۷۰$$

در نهایت با استفاده از معادله ۲٦-۱۷ عامل تغییرات فصلی را برای هر دوره‌ای از t برآورد می‌کنیم؛ برای مثال:

$$F_{11} = ۰/۳F_7 + ۰/۷(\frac{X_{11}}{\bar{X}_{11}})$$
$$= ۰/۳(۰/۷۰۱) + ۰/۷(\frac{۰/۵٤۵}{۰/۷۷۰۹}) = ۰/۷۰۵$$

با استفاده از مراحل فوق می‌توان سایر مقادیر $\bar{X}_t$ ، T_t و F_t را محاسبه کرد. نتایج معادلات مربوطه در جدول ۹-۱۷ مقابل مشاهدات واقعی (X_t) آمده است.

با داشتن برآوردهای مربوط به سطح، روند و عامل فصلی می‌توانیم مقادیر مورد نیاز را در آینده برای عایدی هر سهم پیش‌بینی کنیم. در این مدل پیش‌بینی کافی است که عوامل؛ $\bar{X}_t$ ، T_t ، F_t ، F_{t-1} ، F_{t-2} ، F_{t-3} را در دسترس داشته باشیم تا بتوانیم مقادیر مورد نیاز در آینده را پیش‌بینی کنیم؛ برای مثال در مسألهٔ فوق لازم است که این داده‌های در دسترس باشد:

$\bar{X}_{۳۲} = ۱/۶۲۰۶$ $T_{۳۲} = ۰/۰۶۹۶$ $F_{۲۹} = ۰/۵۶۹$

$F_{۳۰} = ۰/۹۶۸$ $F_{۳۱} = ۰/۸۱۰$ $F_{۳۲} = ۱/۶۷۵$

جدول ۱۷.۹ نتایج مدل پیش‌بینی هُلت ـ وینترز فصلی برای مشاهدات
جدول ۸ـ۱۷ (A=B=۰/۵ , C = ۰/۳)

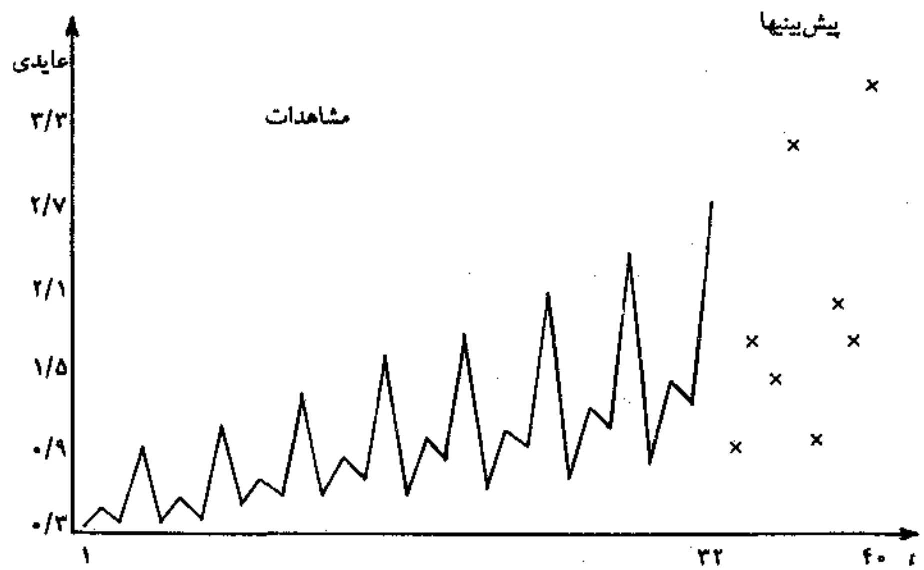
t	X_t	$\bar{X}_t$	T_t	F_t
۱	۰/۳۰۰			
۲	۰/۴۶۰			
۳	۰/۳۴۵			
۴	۰/۹۱۰			
۵	۰/۳۳۰			
۶	۰/۵۴۵			
۷	۰/۴۴۰			۰/۷۰۱
۸	۱/۰۴۰			۱/۶۷۶
۹	۰/۴۹۵			۰/۶۶۹
۱۰	۰/۶۸۰	۰/۷۲۰۶	۰/۰۴۳۷	۰/۹۴۸
۱۱	۰/۵۴۵	۰/۷۷۰۹	۰/۰۴۷۰	۰/۷۰۵
۱۲	۱/۲۸۵	۰/۷۹۲۳	۰/۰۳۴۲	۱/۶۳۸
۱۳	۰/۵۵۰	۰/۸۲۴۳	۰/۰۳۳۱	۰/۶۶۸
۱۴	۰/۸۷۰	۰/۸۸۷۶	۰/۰۴۸۲	۰/۹۷۱
۱۵	۰/۶۶۰	۰/۹۳۵۹	۰/۰۴۸۳	۰/۷۰۵
۱۶	۱/۵۸۰	۰/۹۷۴۳	۰/۰۴۳۳	۱/۶۲۷
۱۷	۰/۵۹۰	۰/۹۵۰۶	۰/۰۰۹۸	۰/۶۳۵
۱۸	۰/۹۹۰	۰/۹۹۰۲	۰/۰۲۴۷	۰/۹۹۱
۱۹	۰/۸۳۰	۱/۰۹۶۰	۰/۰۶۵۲	۰/۷۴۲
۲۰	۱/۷۳۰	۱/۱۱۲۴	۰/۰۴۰۸	۱/۵۷۷
۲۱	۰/۶۱۰	۱/۰۵۷۱	۰/۰۰۷۲	۰/۵۹۴
۲۲	۱/۰۵۰	۱/۰۵۴۷	۰/۰۰۴۸	۰/۹۹۴
۲۳	۰/۹۲۰	۱/۱۴۵۱	۰/۰۴۲۸	۰/۷۸۵
۲۴	۲/۰۴۰	۱/۲۴۰۹	۰/۰۶۹۳	۱/۶۲۴
۲۵	۰/۷۰۰	۱/۲۴۴۰	۰/۰۳۶۲	۰/۵۷۲
۲۶	۱/۲۳۰	۱/۲۵۸۷	۰/۰۲۵۴	۰/۹۸۲
۲۷	۱/۰۶۰	۱/۳۱۷۳	۰/۰۴۲۰	۰/۷۹۹
۲۸	۲/۳۲۰	۱/۳۹۴۱	۰/۰۵۹۴	۱/۶۵۲
۲۹	۰/۸۲۰	۱/۴۴۳۳	۰/۰۵۴۳	۰/۵۶۹
۳۰	۱/۴۱۰	۱/۴۶۶۵	۰/۰۳۸۸	۰/۹۶۸
۳۱	۱/۲۵۰	۱/۵۳۵۱	۰/۰۵۳۷	۰/۸۱۰
۳۲	۲/۷۳۰	۱/۶۲۰۶	۰/۰۶۹۶	۱/۶۷۵

با توجه به رابطهٔ تعریف شده در مرحلهٔ ۱ فرایند مدل پیش‌بینی هُلت ـ وینترز برای سری زمانی فصلی، مقادیر پیش‌بینی شده برای دورهٔ ۳۳ و ۳۴ را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$\hat{X}_{۳۳} = (\bar{X}_{۳۲} + T_{۳۲})F_{۲۹} = (۱/۶۲۰۶ + ۰/۰۶۹۶)(۰/۵۶۹) = ۰/۹۶۱۷$$

$$\hat{X}_{۳۴} = (\bar{X}_{۳۲} + ۲T_{۳۲})F_{۳۰} = [۱/۶۲۰۶ + (۲\times۰/۰۶۹۶)](۰/۹۶۸) = ۱/۷۰۳۵$$

دیگر مقادیر لازم را با استفاده از این رویه می‌توان پیش‌بینی کرد. شکل ۱۰ـ۱۷ نشان‌دهندهٔ داده‌های واقعی و همچنین عایدات پیش‌بینی‌شده برای هر سهم طی دوره بعدی است. چنانکه مشاهده می‌شود، مقادیر تولید شده روند جاری و رفتار فصلی سری زمانی را بسیار خوب تبیین می‌کنند.



شکل ۱۷.۱۰ نمودار مشاهدات و پیش‌بینیهای سری زمانی جدول ۱۷.۹ در خصوص عایدات سهم شرکت ایران دوچرخ با استفاده از مدل هُلت ـ وینترز فصلی

تمرین

۱. جدول زیر نشان‌دهندهٔ عایدی هر سهم شرکتی طی یک دورهٔ هجده ساله است.

عایدی	سال	عایدی	سال	عایدی	سال
٣/٥٤	١٣	٧/٠١	٧	٣/٦٣	١
١/٦٥	١٤	٦/٣٧	٨	٣/٦٢	٢
٢/١٥	١٥	٥/٨٢	٩	٣/٦٦	٣
٦/٠٩	١٦	٤/٩٨	١٠	٥/٣١	٤
٥/٩٥	١٧	٣/٤٣	١١	٦/١٤	٥
٦/٢٦	١٨	٣/٤٠	١٢	٦/٤٢	٦

الف) ضرایب ٠/٨ ، ٠/٤ و ٠/٢ را برای α درنظر گرفته، با استفاده از روش نمو هموار ساده پیش‌بینیهای لازم را محاسبه کنید.

ب) کدام ضریب α را به عنوان ضریب مناسبتر برای پیش‌بینی در مثال فوق انتخاب می‌کنید. چرا؟

ج) روش هُلت ـ وینترز را با استفاده از $A = ٠/٥$ و $B = ٠/٤$ برای پیش‌بینی ضرایب به کارگیرید.

د) آیا مقادیر پیش‌بینی در روش هُلت ـ وینترز از صحت بیشتری نسبت به روش نمو هموار برخوردار هستند؟ چرا؟

٢. جدول زیر عایدی هر سهم را برای شرکتی طی هفت سال نشان می‌دهد.

فصل / سال	١	٢	٣	٤
١	٠/٣٦٢	٠/٣٧٠	٠/٦٢١	٠/٣٨٤
٢	٠/٣٨٩	٠/٣٨٩	٠/٦٣٩	٠/٤٣١
٣	٠/٤١١	٠/٤٤٨	٠/٧١٢	٠/٥٨٤
٤	٠/٦٢٠	٠/٦٢٠	٠/٨٩١	٠/٥٧٠
٥	٠/٥٤٠	٠/٦٩٠	٠/٨٧٠	٠/٦٨٠
٦	٠/٧٨٠	٠/٤٤٠	٠/٨٠٠	٠/٧٨٠
٧	٠/٦٩٠	٠/٤٠٠	١/٠٣٠	٠/٩٤٠

الف) نمودار سری زمانی را رسم کنید. آیا نمودار نشان‌دهندهٔ تغییرات فصلی برای سری زمانی است؟ چرا؟

ب) با استفاده از ضرایب هموارسازی ($C = ٠/٤$ و $B = ٠/٤$ و $A = ٠/٥$) مقادیر پیش‌بینی را برای دست‌کم سه دورهٔ بعدی به کمک مدل پیش‌بینی هلت ـ وینترز فصلی بیان کنید.

٣. وجوه تشابه و تمایز روشهای پیش‌بینی نمو هموار ساده، هلت ـ وینترز غیرفصلی و فصلی را بیان کنید.

١٧ـ٣ـ٥ مدل پیش‌بینی باکس و جنکینز

در این بخش به طور خلاصه رویکردی که امروزه به طور وسیع در محیطهای اقتصادی و

مدیریتی از آن برای پیش‌بینی استفاده می‌گردد، بحث و بررسی می‌شود. باکس و جنکینز اولین بار روش‌شناسی خود را در سال ۱۹۶۰ توسعه دادند و سپس فرایند مدلشان را در کتابی با عنوان تجزیه و *تحلیل سریهای زمانی باکس و جنکینز*[1] چاپ کردند.

اساس رویکرد باکس و جنکینز به بررسی حوزهٔ وسیعی از مدلهای پیش‌بینی برای یک سری زمانی قرارگرفته است. گروه عمومی مدلها برای یک سری زمانی در روش‌شناسی باکس و جنکینز، «مدلهای اتورگرسیو-میانگین متحرک تلفیقی»[2] گفته می‌شوند که در آمار به مدلهای ARIMA معروفند. از مدلهای ARIMA می‌توان مدلهای متعددی چون مدل رگرسیون ساده، رگرسیون چندگانه، میانگین متحرک، نمو هموار ساده و حتی مدلهای ناشناخته دیگر راکه مناسب با سری زمانی هستند، استخراج کرد. باکس و جنکینز معتقدند که پیش‌بینی در یک سری زمانی نه تنها به گذشتهٔ داده‌های آن سری برمی‌گردد، ممکن است به گذشته سریهای زمانی مرتبط نیز مربوط شود. در مدل باکس و جنکینز علاوه بر عامل روند به تغییر فصلی و تصادفی نیز توجه می‌شود.

مدلهای باکس و جنکینز و ابزارهای استفاده شده در آن فقط برای سریهای زمانی «ایستا» کاربرد دارد. بنابراین قبل از اینکه یک سری زمانی غیرایستا به وسیلهٔ این مدل تحلیل گردد، باید با استفاده از روشهای «دیفرانسیل‌گیری» به یک سری ایستا تبدیل شود. باکس و جنکینز روش‌شناسی ویژه‌ای برای مدلهای ARIMA دارند که آن روش‌شناسی به طور کلی بر سه مرحله استوار است و این مراحل عبارتند از:

مرحله اول، تعیین مدل. تعیین یک مدل مناسب ضرورتاً دقیق نمی‌باشد و علت دقیق نبودنش آن است که نمی‌دانیم در عمل چه مدل یا فرایندی به وجود می‌آید و یا اینکه چه شرایط و مقتضیاتی وجود دارد. با استفاده از روشهای آماری اولیه و ساده می‌توان مدل خاصی راکه مناسب به نظر می‌رسد از گروه عمومی مدلهای ARIMA انتخاب کرد. واقعیت این است که هیچ‌گونه قواعد مشخصی برای انتخاب مدل وجود ندارد و انتخاب نوع مدل به‌نمایش هندسی سری زمانی و قضاوت و تجربهٔ تحلیلگر بستگی دارد. این مطلب را باید درنظرداشته باشیم که تعیین اولیهٔ مدل ما را به هیچ چیز جز پذیرفتن یک گروه آزمایشی ARIMA ـ که در مراحل بعدی باید به طور کارآمدی برازش شوند ـ نمی‌رساند.

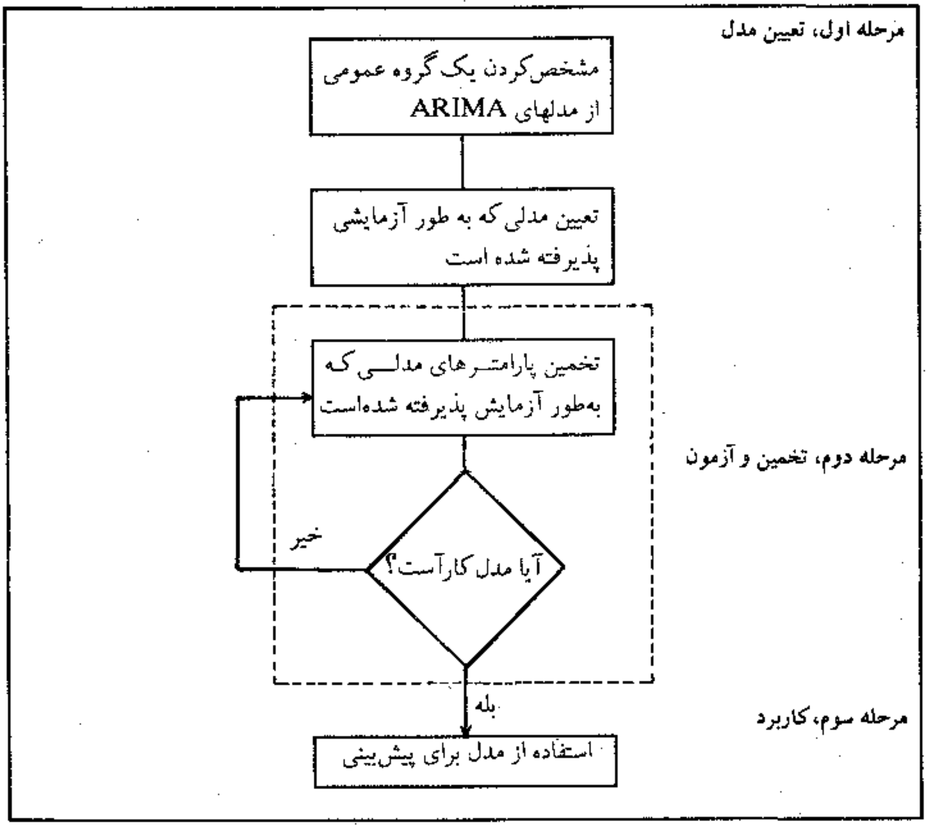
مرحله دوم، تخمین پارامترهای مدل و آزمون آن. با تعیین مدل اولیه در مرحله اول باید با استفاده از داده‌های موجود به برآورد پارامترهای مدل پرداخت. روشهای آماری

---

1. *The Box-Jenkins Time Series Analysis*
2. autoregressive integrated moving average models

مناسبی برای تخمین پارامترها وجود دارد که در این رابطه می‌توان در صورت خطی‌بودن مدل به «روش حداقل مربعات خطی»[1] و در صورت غیرخطی بودن آن به «روش حداقل مربعات غیرخطی»[2] اشاره کرد.

با ساختن مدل، این سؤال پیش می‌آید که آیا مدل سازگار با سری زمانی است یا خیر؟ برای پاسخ به این سؤال می‌توان از آزمونهای نیکویی برازش کای ـ مربع و کولموگوروف ـ اسمیرنوف که در فصول قبل دربارهٔ آنها بحث کردیم استفاده کرد. در صورتی که مدل برازش شده، کارآ باشد به مرحلهٔ سوم می‌رویم، در غیر این صورت به گروه ARIMA برگشت کرده و مدل دیگری از آنها انتخاب می‌کنیم.



شکل ۱۱ـ۱۷ روش‌شناسی باکس و جنکینز و مراحل حل در مدلهای ARIMA

1. linear least squares methods
2. nonlinear least squares methods

مرحله سوم، کاربرد مدل برای پیش‌بینی. اگر دنباله واقعی سری زمانی را X_1، X_2، ... ، X_n بدانیم، می‌توانیم با استفاده از مدل برازش شده و کارآ از گروه ARIMA برای پیش‌بینی، X_{n+1}، X_{n+2}، ... ، X_{n+h} استفاده کنیم.

شکل ۱۱ـ۱۷ نشان‌دهندهٔ مراحل روش‌شناسی باکس و جنکینز تا رسیدن به مرحله پیش‌بینی است.

انعطاف‌پذیری رویکرد باکس و جنکینز سبب شده‌است که کاربرد آن در عرصه اقتصاد و صنعت بیش از پیش باشد و به نحو عجیبی بر سایر مدلهای پیش‌بینی غالب شود. پیشرفت تکنولوژی رایانه نیز به کاربران اجازه داده است از مدلهای پیچیدهٔ باکس و جنکینز استفاده کنند. در کشور ما نیز تحقیقات زیادی در این زمینه صورت گرفته است.

۶ـ۳ـ۱۷ مدلهای پیش‌بینی اقتصادسنجی

یک مدل اقتصادسنجی، متشکل از یک یا چند معادله که توصیف کننده رابطهٔ میان متغیرهای مختلف است می‌باشد. مدلهای اقتصادسنجی، مدلهای احتمالی هستند و بر روابط احتمالی‌ای که بین یک متغیر وابسته و یک یا چند متغیر مستقل وجود دارد، تأکید دارند.

استفاده از متغیرهای متعدد اقتصادی و اجتماعی که به طور علّی[1] بامتغیر وابستهٔ y ارتباط دارند، وجه تمایز بین مدلهای پیش‌بینی اقتصادسنجی از سایر مدلهای پیش‌بینی در سریهای زمانی است. «مدلهای اقتصادسنجی سعی دارند که رابطهٔ میان چنین متغیرهایی را با استفاده از یک یا چند معادلهٔ رگرسیون توصیف کنند، در حالی که مدلهای سری زمانی، این دسته از متغیرهای علّی را نادیده گرفته، صرفاً به پردازش اجزای سری زمانی که در بطن y نهفته است، می‌پردازند.»

برای ساختن یک مدل پیش‌بینی اقتصادسنجی، معمولاً با تعداد زیادی از متغیرها، که ممکن است ارتباط نزدیکی با متغیر پاسخ داشته باشند، آغاز می‌کنیم. سپس این متغیرها را با استفاده از داده‌های نمونه به گونه‌ای ترکیب می‌کنیم که مدل سازگار با سری زمانی شکل پیدا کند. با وجود این، احتمال دارد مدلی که با داده‌های تاریخی سازگاری دارد، با پدیده‌های احتمالی آینده ناسازگار باشد و ما را با پیش‌بینیهای نادرست مواجه سازد. از آنجا که پیش‌بینی با آینده سر و کار دارد، پس باید مدل پیش‌بینی را

---

1. causal

به گونه‌ای انتخاب کنیم که به بهترین وجه قادر به بیان مقادیر و روابط آینده باشد، نه اینکه فقط با گذشتهٔ سری زمانی سازگار باشد.

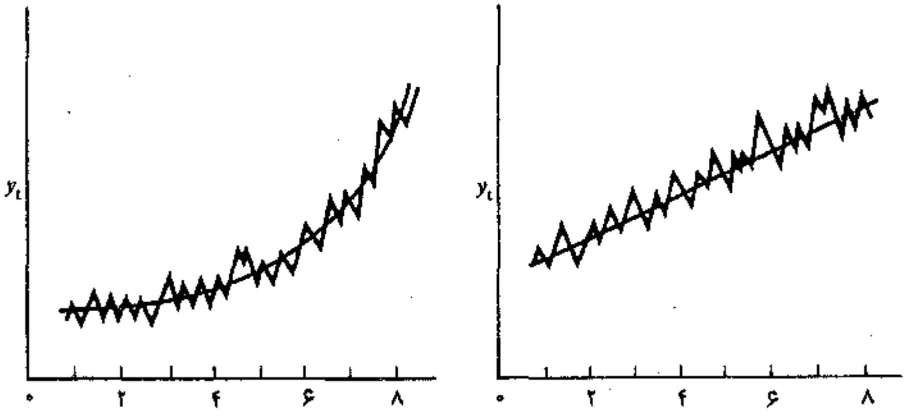
مدل رگرسیون خطی، یکی از مدلهای معروف اقتصادسنجی است که در بسیاری از مواقع مدل احتمالی مناسبی برای تعیین روند بلندمدت در سریهای زمانی است؛ برای مثال یک روند افزایشی یا کاهشی بلندمدت، شبیه آنچه در شکل ۱۲-۱۷ «الف» نشان داده شده است، با استفاده از یک خط مستقیم قابل برازش است. معادلهٔ خط به کمک روابطی که در فصل سیزدهم، بخش معادلهٔ رگرسیون خطی ساده بیان شد، تعریف‌پذیر است. معادلهٔ خطی شکل مورد نظر عبارت است از:

$$y = \alpha + \beta x + e \qquad (۱۷\text{-}۲۷)$$

که در آن متغیر مستقل، x، بیانگر زمان است. یک روند بلندمدت غیرخطی شبیه آنچه در شکل ۱۲-۱۷ «ب» نشان داده شده، با استفاده از تابع درجهٔ دوم همانند رابطهٔ زیر قابل مدلسازی است:

$$y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + e \qquad (۱۷\text{-}۲۸)$$

که معادلهٔ برازش شده آن، $\hat{y} = a + b_1 x + b_2 x^2$، با استفاده از روش حداقل مربعات تعریف‌پذیر است. این روش در فصل چهاردهم بخش ۵-۱۴ بتفصیل توضیح داده شد.



الف) روند خطی در بلندمدت

ب) روند غیرخطی در بلندمدت

شکل ۱۷.۱۲ سریهای زمانی با روند خطی و غیرخطی در بلندمدت

بسیاری از مدلهای اقتصادسنجی، از نوع چندگانه هستند؛ به عبارت دیگر متغیر وابسته تحت تأثیر متغیرهای مستقل متفاوت است، بنابراین معادلهٔ آن، رگرسیون چندگانه نام گرفته است. همانند:

$$y = \propto + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + e \qquad (۱۷\text{-}۲۹)$$

که در آن y با k متغیر مستقل رابطهٔ علّی دارد. معادلهٔ برآورد شده آن نیز با استفاده از روابط بخش ۳ـ۱۴ در فصل چهاردهم تعریف‌پذیر است.

از آنجا که مدلهای اقتصادسنجی بیانگر روابط علّی ـ معلولی بین y و x هستند، پس به آنها «مدلهای علّی ـ معلولی» نیز گفته می‌شود.

تمرین

۱. مراحل مدل پیش‌بینی باکس و جنکینز را تشریح کنید.
۲. تفاوت بین مدلهای اقتصادسنجی و مدلهای سری زمانی را در پیش‌بینی ذکر کنید.
۳. به طور خلاصه محاسن استفاده از مدلهای اقتصادسنجی را در پیش‌بینی ذکر کنید.
٤. جدول زیر نشان‌دهندهٔ تعداد فروش شرکتی طی دو سال است (ارقام به هزار واحد می‌باشد):

ماه	سال اول	سال دوم	ماه	سال اول	سال دوم
فروردین	۱۵/۸	۱٦/٤	مهر	۱٦/۱	۱٦/٦
اردیبهشت	۱۵/۷	۱٦/۲	آبان	۱۵/۹	۱٦/۵
خرداد	۱۵/۳	۱۵/۹	آذر	۱۵/۹	۱٦/٦
تیر	۱۵/۵	۱٦/۱	دی	۱٦/٤	۱۷/۰
مرداد	۱٦/۰	۱٦/۲	بهمن	۱٦/٤	۱۷/٤
شهریور	۱٦/۲	۱٦/۷	اسفند	۱۷/۱	۱۸/۰

الف) نمودار سری زمانی را رسم کنید.
ب) نوع مدل اقتصادسنجی را برای پیش‌بینی رفتار سری زمانی مناسب می‌دانید، نام ببرید.
ج) یک مدل رگرسیون ساده، $y = \propto + \beta t$، برای سری زمانی برازش کنید.
د) یک مدل رگرسیون درجه ۲؛ $y = \propto + \beta_1 t + \beta_2 t^2$، برای سری زمانی برازش کنید.
ه) بنویسید کدام مدل رگرسیون را برای پیش‌بینی در سری زمانی مناسب می‌دانید و چرا؟

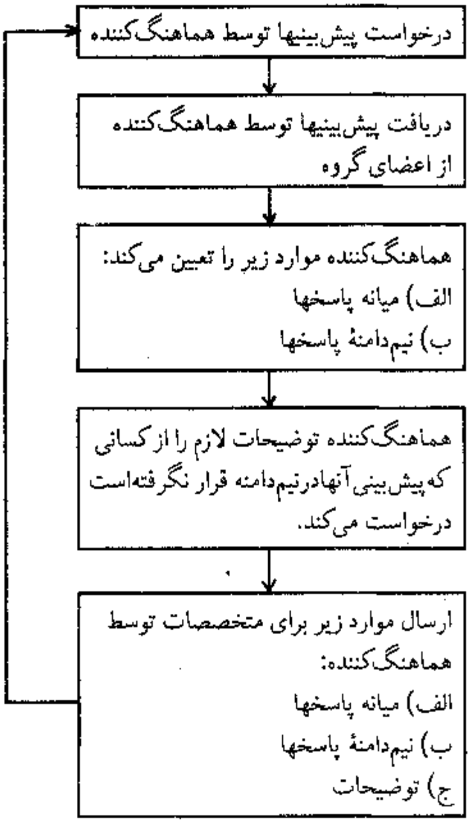
٤ـ۱۷ مدلهای پیش‌بینی کیفی

در بسیاری از موارد برای تصمیم‌گیری، اطلاعات کامل و دقیقی از گذشته در دست

نیست و یا محیط به گونه‌ای آشفته است که نمی‌توان اطلاعات گذشته را ملاک پیش‌بینی آینده و تصمیم‌گیری قرار داد. در چنین شرایطی تحلیلگر برای پیش‌بینی آینده به روشهای کیفی متوسل می‌شود. در روشهای کیفی مبنای پیش‌بینی، تجربه، تخصص، قضاوت و قدرت پیشگویی صاحبنظران و متخصصان آن حوزهٔ تصمیم‌گیری است. مهمترین فنون پیش‌بینی کیفی عبارتند از: روش دلفی، روش طوفان مغزی و روش گروه اسمی که به ترتیب شرح داده می‌شوند.

۱-۴-۱۷ روش دلفی

روش دلفی[1] که به وسیلهٔ شرکت راند[2] برای پیش‌بینیهای کیفی پیشنهاد شده، روشی



شکل ۱۷.۱۳ فرایند روش دلفی برای پیش‌بینی کیفی

1. Delphi method
2. Rand Corporation

است که براساس نظر یک گروه از متخصصان و یک نفر هماهنگ‌کننده شکل می‌گیرد و هیچ عضوی از گروه از سایر اعضای آن خبر ندارد بلکه همهٔ ارتباطات از طریق هماهنگ‌کنندهٔ اصلی انجام می‌گیرد. فرایند دلفی در شکل ۱۳-۱۷ نشان داده شده است.

هماهنگ‌کننده، پس از دریافت پاسخها از اعضای گروه، نیم‌دامنه و میانهٔ پاسخها را محاسبه می‌کند. نیم‌دامنه عبارت است از تفاوت چارک سوم و اول که شامل ۵۰ درصد پاسخها خواهد شد. از متخصصانی که پاسخ آنها خارج از نیم‌دامنه قرار می‌گیرد، خواسته می‌شود که توضیحات خود را راجع به علت پیش‌بینی ذکر کنند. هماهنگ‌کننده توضیحات مربوط به پیش‌بینیهای خارج از نیم‌دامنه و میانهٔ پاسخها را برای کلیهٔ اعضای گروه ارسال خواهد کرد. فرایند شکل ۱۳-۱۷ آنقدر تکرار خواهد شد که اجماع لازم برای پیش‌بینی حاصل شود. اگرچه احتمال می‌رود که پیش‌بینی نهایی به میانهٔ پاسخها در دوره اول نزدیک باشد، ولی هیچ بعید نیست پاسخی که در دوره اول خارج از نیم‌دامنه بوده‌است، در دوره نهایی به عنوان پیش‌بینی مورد اجماع پذیرفته شود.

۲-٤-۱۷ روش طوفان مغزی

یکی از روشهای بسیار مهم و متداول در پیش‌بینیهای کیفی، «روش طوفان مغزی»[1] است. با استفاده از این روش می‌خواهیم تحرکی بزرگ در فکر و ذهن اعضای گروه به وجود آوریم و سیلی خروشان از عقاید و نظرهای بدیع به راه‌اندازیم تا پیش‌بینی نهایی به واقعیت نزدیکتر باشد.

طوفان مغزی به عنوان یک روش براساس این فرضیه بنا شده است که جلسه‌ای تشکیل شود تا در آن هرکس بتواند آزادانه و بدون ترس از انتقاد، هر فکری که به نظرش می‌رسد، ابراز کند. در جلسات طوفان مغزی یافتن نظرهای جدید اولویت دارد و مطالعهٔ امکانپذیری آنها، به بعد موکول می‌شود. در این جلسات باید اعضای گروه را به ترکیب و تلفیق و بهتر کردن عقاید و نظرهای خود، تشویق کرد و از آنها خواست که به یافتن تنها چند راه حل معدود اکتفا نکنند و تا جایی که می‌توانند، راه‌حلهای بیشتر و متنوعتری ارائه دهند. هرچه اعضای گروه در موضوع پیش‌بینی مجربتر و متخصصتر بوده و همچنین از نظر رتبه در یک سطح باشند، پیش‌بینی نهایی به واقعیت نزدیکتر است.

---

1. braihstorming method

۱۷-۴-۳ روش گروه اسمی

در روش «طوفان مغزی»، نظم و قاعدهٔ خاصی برای پیش‌بینی وجود ندارد و در واقع، با آزادگذاشتن کامل افراد و با تأکید و تشویق بر خودجوشی می‌خواهیم به نظر و عقاید تازه‌ای برسیم و از این راه، تصمیم‌گیری گروهی را بهتر و غنی‌تر کنیم. در حالی که گروه اسمی[1]، روشی است که می‌خواهد ضمن تشویق و ترغیب افراد به نوآوری و خلاقیت و فراهم‌آوردن شرایط مناسب برای آن، به فرایند پیش‌بینی، نظم بیشتری دهد. گروه اسمی مراحل زیر را داراست:

۱. بعد از اینکه اعضای گروه در جلسه حاضر شدند، رئیس گروه مسأله را بروشنی، ولی به طور خلاصه بیان می‌کند. اگرچه اعضای گروه می‌توانند برای روشنترشدن موضوع، سؤال بکنند، ولی اجازه بحث و گفتگو به آنها داده نمی‌شود.

۲. هریک از اعضا، نظر و عقیده خود را بیان می‌کند و هماهنگ‌کننده، این نظرها و عقاید را به طور خلاصه یادداشت می‌کند.

۳. با نظارت و هدایت رئیس گروه، اعضای گروه شروع به سؤال از یکدیگر می‌کنند. منظور از این سؤالات، برطرف‌کردن هرگونه ابهام دربارهٔ نظرهای یکدیگر است.

۴. از هریک از اعضای گروه خواسته می‌شود که به طور مستقل و بدون مشورت با دیگران، پیش‌بینیها را از بهترین تا بدترین رتبه‌بندی کند. پیش‌بینیهایی که در پایین‌ترین رتبه قرار می‌گیرند، حذف می‌شوند.

۵. هریک از اعضای گروه می‌تواند برای روشنترشدن نظرهای باقیمانده، از دیگری سؤال کند.

۶. یک بار دیگر و این بار به طور نهایی، اعضای گروه، عقاید و نظرها را طبقه‌بندی می‌کنند. پیش‌بینی و عقیده‌ای که بالاترین رتبه را به دست آورد به عنوان پیش‌بینی نهایی گروه پذیرفته خواهد شد.

تمرین

۱. مراحل روش دلفی را برای پیش‌بینی نهایی توضیح دهید.
۲. مراحل روش گروه اسمی را بنویسید.
۳. تفاوت روش طوفان مغزی و گروه اسمی را بنویسید.

---

1. nominal group method

۱۷ـ۵ مدلهای تلفیقی

اغلب تحلیلگران برای انتخاب بهترین مدل پیش‌بینی، تلاش می‌کنند که مدلهای متعدد را به طور مجزا بررسی و آزمون کنند. مدلی که پیش‌بینیهای آن انحراف کمتری با واقعیت داشته باشد به عنوان بهترین مدل انتخاب می‌شود. رویکرد انتخاب یک مدل خاص از بین مدلهای مختلف پیش‌بینی بر این تفکر بنا شده است که بالاخره بهترین مدل برای تبیین رفتار یک سری زمانی وجود دارد و هیچ مدلی غیر از مدل انتخاب شده دارای صحت در پیش‌بینی نیست.

تحقیقات اخیر نشان داده است که ترکیب دو یا چند مدل خاص پیش‌بینی می‌تواند به صحت بهتری از مقادیر پیش‌بینی بیانجامد. «رویکرد تلفیقی»[1] بر این فرض بنا شده است که برخی مدلهای حذف شده، صرف نظر از مدل انتخاب شده اطلاعات مفیدی دارند که با قرارگرفتن در کنار مدل انتخابی و ترکیب آنها با همدیگر، واریانس خطای پیش‌بینی بسیار کوچک خواهد شد.

ساده‌ترین و شاید کارآمدترین روش برای تهیهٔ مدل تلفیقی این است که مقادیر پیش‌بینی شده به وسیلهٔ هر مدل خاص به عنوان یک متغیر مستقل درنظرگرفته شوند. سپس متغیرهای مستقل در قالب یک مدل رگرسیون چندگانه تعریف شوند؛ برای مثال اگر فکر می‌کنیم که مدل تلفیقی برای پیش‌بینی فروش کالایی از تلفیق روش نمو هموار ساده و روش هُلت ـ وینترز تشکیل می‌شود، می‌توانیم متغیرهای زیر را تعریف کنیم.

y_t: مقدار واقعی فروش دوماه t

x_{1t}: مقدار پیش‌بینی به وسیلهٔ روش نمو هموار ساده در ماه t

x_{2t}: مقدار پیش‌بینی فروش به وسیلهٔ روش هُلت – وینترز در ماه t

بنابراین مدل رگرسیون چندگانه عبارت است از:

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + e_t \qquad (۱۷\text{ـ}۳۰)$$

برای پیش‌بینی فروش در ماه (t+۱) براساس مدل تلفیقی، اول باید $x_{1,t+1}$ و $x_{2,t+1}$ را محاسبه کنیم و سپس معادلهٔ پیش‌بینی فروش را به صورت زیر تعریف کنیم:

---

1. combining approach

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{\alpha} + b_1 x_{1,t+1} + b_2 x_{2,t+1} \qquad (17\text{-}31)$$

واضح است که برای تشکیل مدل تلفیقی، صرفاً از دو مدل پیش‌بینی استفاده نمی‌شود، بلکه هر تعداد مدل پیش‌بینی که تلفیق مقادیر پیش‌بینی آنها به بالابردن صحت مقادیر پیش‌بینی نهایی منجر شود، ترکیب‌پذیر هستند. معیار انتخاب یک مدل پیش‌بینی خاص و واردکردن آن به معادلهٔ رگرسیون چندگانه آن است که با ورود آن، ضریب تشخیص چندگانه (R^2) افزایش یابد. به طور کلی از روشهایی که در انتخاب متغیرهای مستقل در رگرسیون چندگانه استفاده می‌شوند در اینجا هم می‌توان از آنها استفاده کرد. روشهای بررسی مدل تلفیقی متفاوتند که از آن جمله می‌توان به روش قدم به قدم[1]، روش برگشت به عقب[2] و روش پیشرو[3] اشاره کرد.

اگرچه مدلهای پیشرفته‌ای چون ARIMA و اقتصادسنجی، پیش‌بینیهای خوبی در محیطهای پویا و دوره‌های زمانی میان مدت و کوتاه مدت دارند، ولی تحقیقات زیادی نشان می‌دهد که تلفیق مدلهای پیش‌بینی بشدت خطای پیش‌بینی را کاهش می‌دهد. به طوری که در برخی از تحقیقات بهبودی تا ۸۸ درصد کاهش در MSE گزارش شده است.

۱۷ـ۶ خلاصه

تحلیل سریهای زمانی نشان داد که هر سری زمانی دست کم یکی از تغییرات ـ روند، فصلی، دوره‌ای و نامنظم ـ را دارد. این تغییرات تشکیل‌دهندهٔ سری زمانی هستند و به اجزای سری زمانی معروفند. براساس نوع تغییرات سری زمانی و تحلیل آن می‌توان به دو گروه مدل پیش‌بینی پی برد:

گروه اول مدلهای کمّی هستند که مهمترین آنها عبارتند از: ۱. ساده (بدون تغییر و با درصد تغییر)، ۲. میانگین متحرک (ساده و موزون)، ۳. نمو هموار ساده، ٤. هُلت ـ وینترز (فصلی و غیرفصلی)، ٥. اتورگرسیو ـ میانگین متحرک تلفیقی (ARIMA)، ٦. اقتصادسنجی.

گروه دوم به روشهای کیفی معروفند که در محیطهای آشفته و پویا از آنها استفاده می‌شود و اساس پیش‌بینی در آنها اجماع خبرگان و متخصصان امراست. مهمترین مدلهای این گروه عبارتند از: ۱. روش دلفی، ۲. روش طوفان مغزی، ۳. روش گروه اسمی.

1. stepwise 2. backward 3. foreward

جدول ۱۰-۱۷ مقایسهٔ روشهای پیش‌بینی

معیار ارزیابی		شرح معیار	مدلهای ساده	فنون کیفی	میانگین متحرک	نمو هموار	روش هلت - وینترز	مدلهای ARIMA	مدلهای اقتصادسنجی
زمان	افق پیش‌بینی	آیا دورهٔ پیش‌بینی، یک نیاز فعلی یا کوتاه مدت یامیان مدت یا بلندمدت است؟	نیاز فعلی تامیان مدت	میان مدت، بلند مدت	کوتاه مدت، میان مدت، بلند مدت	نیاز فعلی تا کوتاه مدت یامیان‌مدت	کوتاه مدت، میان مدت یا بلندمدت	کوتاه مدت، میان مدت یا بلند مدت	کوتاه مدت، میان‌مدت، یا بلند مدت
	درجهٔ فوریت	فوریت پیش‌بینی چقدر است؟	نتایج سریع مزیت اصلی این فن است.	فوریت‌بشدت تحت تأثیر کیفیت آن‌است	نتایج‌سریع‌مزیت اصلی این فن است.	←	اگرداده‌دردسترس‌باشد محاسبه سریع است، ولی جمع‌آوری داده، علت کندی آن‌است.	فرموله کردن مدل زمان می‌برد، اما پیش‌بینی‌سریع‌است.	ساختن مدل طولانی است، ولی تولید پیش‌بینی سریع است.
	فراوانی	فراوانی روزآمدکردن پیش‌بینی چقدر است؟	بآسانی قابلیت سازگاری رابرای روزآمدکردن دارد	معمولاً برای پیش‌بینی دریک یک‌مقطع‌زمانی به کارمی‌رود	پیش‌بینی‌به‌طورمنظم می‌تواند روزآمدشود	←	←	←	اگر داده در دسترس باشد پیش‌بینی بسرعت قابل روزآمدکردن است.
منابع مورد نیاز	پیچیدگی ریاضی	مهارتهای مقداری مورد نیاز تا چقدر است؟	حداقل مهارت مقداری‌لازم‌است.	←	←	←	مبانی‌ریاضی درحدلازم نیاز دارد.	سطح بالایی از درک ریاضی نیاز دارد.	به سطح بالایی از درک ریاضی نیاز دارد.
	کامپیوتر	میزان‌استفاده‌ازکامپیوتر تا چه حد است؟	استفاده‌ازکامپیوتر ضروری است.	←	کامپیوتر برای روز آمدکردن مدل مفید است.	←	←	کامپیوتر در بیشتر موارد ضروری است.	کامپیوتر در همهٔ موارد ضروری است.
	مالی	میزان منابع مالی مورد نیاز چقدر است؟	برای اجرا و نگهداری خیلی گران نیست	برای‌تصمیم‌گیری و قانع‌کردن اعضای گروه هزینه‌لازم‌است.	اگرداده‌هادردسترس باشد هزینه‌ها حداقل می‌شود.	←	اگر داده‌ها دردسترس باشند، هزینه‌توسعه‌مدل متوسط است.	←	هزینه توسعه مدل قابل توجه است، ولی هزینهٔ عملیات متوسط است.
وارده	سوابق	آیا فقط به داده‌های تاریخی محدودمی‌شود؟	بعضی ازداده‌های گذشته‌لازم‌است، ولی تاریخچه‌سری لازم نیست.	←	کل داده‌های‌تاریخی لازم است.	فقط پیش‌بینیهای اخیروداده‌های فعلی نیاز است مقدار*نیزتعیین می‌شود.	فقط پیش‌بینیهای اخیر و وداده‌های‌فعلی‌لازم‌است، مقادیر A، B و C نیز باید تعیین شود.	کل داده‌های‌تاریخی و متغیرهای علّی‌لازم هستند.	به داده‌های تاریخی و متغیرهای علّی نیاز است
ستانده	صحت	صحت مقادیر پیش‌بینی تا چه اندازه است؟	اغلب یک سطح محدودی از صحت فراهم می‌کند.	اغلب صحت ویژه‌ای‌ندارد، ولی درصورتی‌که افق تعمیم وسیع باشد و شرایط پویاباشدصحت خوبی دارد	باثبات‌محیط‌وشرایط، صحت آن مناسب است.	برای‌پیش‌بینیهای کوتاه مدت صحت آن بالاست.	برای پیش‌بینیهای کوتاه مدت و میان مدت از صحت خوبی برخوردار است.	عملکرد خوبی در محیطهای پویا دارد.	عملکرد خوبی در محیطهای پویا دارد.

توجه: علامت فلش (←) به منزله تکرار توضیح روش قبلی است.

Source: Georgoff, D.M. and R.C. Murdick; "Managers' Guide to Forecasting", *Harvard Business Review;* vol. 64,no.1, Jan-feb. 1986, pp. 110-120.

چکیدهٔ مباحث این فصل در جدول ۱۰-۱۷ ارائه شده است. براساس اطلاعات جدول، تحلیلگر می‌تواند با توجه به شرایط و اطلاعات موجود بهترین مدل پیش‌بینی را انتخاب کند.

اگرچه با پیشرفت مدلها، صحت پیش‌بینی به نحو چشمگیری بهبودیافته است، ولی بالاترین سطح صحت پیش‌بینی را می‌توان با تلفیق دست کم دو مدل از مدلهای جدول ۱۰-۱۷ به دست آورد. رویکرد تلفیقی در پیش‌بینی جدیدترین رویکرد است.

۱۷.۷ سؤالات و مسائل

سؤالات دوگزینه‌ای

۱. هر سری زمانی، همواره تغییرات فصلی دارد. ص ☐ غ ☐

۲. مدل پیش‌بینی نمو هموار ساده «روند» را در نظر نمی‌گیرد. ص ☐ غ ☐

۳. مدل میانگین متحرک سادهٔ مرکزی یک مدل پیش‌بینی کیفی است. ص ☐ غ ☐

٤. از میانگین متحرک سادهٔ مرکزی برای هموارسازی سری زمانی استفاده می‌شود. ص ☐ غ ☐

٥. هر مدلی که MSE بزرگتری داشته باشد از صحت پیش‌بینی بالاتری برخوردار است. ص ☐ غ ☐

٦. اگر ضرایب جریمه برای انحرافات به صورت خطی افزایش یابد، بهتر است برای تعیین صحت پیش‌بینی از MSE استفاده شود. ص ☐ غ ☐

۷. براساس مدل باکس و جنکینز نه تنها به گذشتهٔ سری زمانی، بلکه به سریهای مرتبط در پیش‌بینی هم باید توجه داشت. ص ☐ غ ☐

۸. مدلهای ARIMA صرفاً برای سریهای زمانی غیرایستا استفاده می‌شوند. ص ☐ غ ☐

۹. مدل اقتصادسنجی یک مدل علّی ـ معلولی است. ص ☐ غ ☐

۱۰. مدلهای تلفیقی در پیش‌بینی فقط از ترکیب دو مدل خاص حاصل می‌شوند. ص ☐ غ ☐

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. از مدل نمو همواره ساده برای پیش‌بینی در چه نوع سریهای زمانی استفاده می‌شود؟

الف) سریهای زمانی که تغییرات فصلی دارند. ج) سریهای زمانی که تغییرات منظم دارند.

ب) سریهای زمانی که تغییرات دوره‌ای دارند. د) سریهای زمانی که تغییرات فصلی و نامنظم دارند.

۱۲. در مدل نمو هموار ساده اگر $\alpha = ۰/۱۰$ باشد، تعداد دوره‌های سری زمانی حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟

الف) ۱۰ ج) ۲۰
ب) ۱۹ د) ۵

۱۳. کدام یک از گزینه‌های زیر برای A و B در مدل هُلت ـ وینترز درست است؟
الف) ۱ و ۰ ب) ۰ و ۱ ج) $\frac{1}{2}$ و ۱ د) $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$

۱۴. کدام یک از روشهای زیر، جزء روشهای کمّی است؟
الف) گروه اسمی ج) دلفی
ب) طوفان مغزی د) میانگین متحرک وزنی

۱۵. کدام یک از روشهای زیر، جزء روشهای کیفی است؟
الف) هُلت ـ وینترز ج) دلفی
ب) باکس و جنکینز د) نمو هموار ساده

۱۶. مدلهای تلفیقی از ترکیب چند مدل خاص حاصل می‌شوند؟
الف) فقط دو ج) فقط چهار
ب) فقط سه د) دست کم دو

۱۷. کدام یک از مدلهای زیر، جزء مدلهای ARIMA نیستند؟
الف) دلفی ج) رگرسیون ساده
ب) میانگین متحرک ساده د) میانگین متحرک وزنی

۱۸. کدام یک از روابط زیر می‌تواند درخصوص معادلهٔ روند هُلت ـ وینترز برای سریهای زمانی غیرفصلی درست باشد؟

الف) $T_t = BT_{t-1} + (1-B)(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1})$

ب) $T_t = BT_t + (1-B)\bar{X}_t$

ج) $T_t = (1-B)T_{t-1} + B(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1})$

د) $T_t = (1-B)T_{t-1} + (1-B)\bar{X}_{t-1}$

۱۹. فرض کنید در مدل هُلت ـ وینترز $A = ۰/۳$ ، $B = ۰/٤$ ، $\bar{X}_n = ٤۹/٤۷$ ، $\bar{X}_{n-1} = ٤۹/۷۷$ و $T_{n-1} = -۰/۳۱$ باشد. مقدار T_n چقدر است؟
الف) ۰/٤۹− ج) ۰/۳۰٤−
ب) ۰/۲۵۱− د) ۰/۳۳−

۲۰. کدام یک از مدلهای زیر از صحت بالاتری برخوردارند؟
الف) تلفیق باکس و جنکینز با هُلت ـ وینترز ج) تلفیق هُلت ـ وینترز با نمو هموار ساده
ب) تلفیق باکس و جنکینز با میانگین متحرک د) به معیارهای صحت بستگی دارد.

۲۱. کدام یک از مدلهای زیر متغیر مستقل دارند؟

الف) اقتصادسنجی   ج) میانگین متحرک وزنی
ب) هُلت ـ وینترز   د) نمو هموار ساده

۲۲. کدام یک از شاخصهای زیر فاقد واحد است؟
الف) MSE   ج) RMSE
ب) MAPE   د) MAD

۲۳. مقدار C در مدل هُلت ـ وینترز دارای چقدر می‌تواند باشد؟
الف) کوچکتر از ۱   ج) بزرگتر از صفر
ب) کوچکتر از ۱ بزرگتر از صفر   د) مثبت

مسائل

۲۴. تفاوت روشهای ساده پیش‌بینی با روشهای کیفی چیست؟
۲۵. شما به عنوان یک تحلیلگر در چه شرایطی از روشهای کمّی و در چه شرایطی از روشهای کیفی برای پیش‌بینی استفاده می‌کنید؟
۲۶. با ذکر مثالی توضیح دهید برای تهیهٔ یک مدل تلفیقی در پیش‌بینی چگونه باید عمل کرد؟
۲۷. جدول زیر هزینهٔ تجهیزات کارخانه‌ای را در شش سال برای چهار فصل نشان می‌دهد.

سال \ فصل	۱	۲	۳	٤
۱	۲۱/۵۰	۲٤/۷۳	۲۵/۰٤	۲۸/٤۸
۲	۲٤/۱۰	۲۸/۱٦	۲۸/۲۳	۳۱/۹۲
۳	۲۵/۸۲	۲۸/٤۳	۲۷/۷۹	۳۰/۷٤
٤	۲۵/۸۷	۲۹/۷۰	۳۰/٤۱	۳٤/۵۲
۵	۲۹/۲۰	۳۳/۷۳	۳٤/۸۲	۳۸/۰٦
٦	۳۲/۳۵	۳۷/۸۹	۳۸/٦۷	٤٤/۹۱

الف) نمودار این داده‌ها را رسم کرده و در خصوص انواع تغییرات آن بحث کنید.
ب) با استفاده از روش میانگین متحرک سادهٔ مرکزی به ازای m = ۲ نمودار هموار شده را رسم کنید.
ج) با استفاده از A = ۰/۵۰ و B = ۰/۳۰ مقادیر پیش‌بینی را برای ۲۶ و t = ۲۵ به دست آورید.
د) با استفاده از A = ۰/۵ و B = ۰/۳ و C = ۰/٤ مقادیر پیش‌بینی را برای ۲۶ و t = ۲۵ به دست آورید.
۲۸. جدول زیر قیمت طلا را در پایان سال طی چهارده سال نشان می‌دهد:

قیمت (به ریال)	سال	قیمت (به ریال)	سال	قیمت (به ریال)	سال
٤٠٥	١١	٣٩٩	٦	١٣٥	١
٤٨٦	١٢	٤٥٠	٧	١٦٦	٢
٤١٠	١٣	٣٨٥	٨	٢٢٧	٣
٣٦٩	١٤	٣٠٨	٩	٥٣٣	٤
-	-	٣٢٩	١٠	٥٩١	٥

الف) نمودار داده‌ها را رسم کرده، درخصوص نوع تغییر بحث کنید.

ب) با استفاده از روش میانگین متحرک سادهٔ مرکزی (٢ = m) نمودار هموارشده را رسم کنید.

ج) از میانگین متحرک ساده با یک دوره جلوتر استفاده کرده و پیش‌بینیهای ١٦ و ١٥ = t را به دست آورید.

د) اگر ٠/١٠ = ∝ باشد، با استفاده از روش نمو هموار ساده برای ١٦ و ١٥ = t مقادیر پیش‌بینی را به دست آورید.

ه) با استفاده از RMSE صحت هریک از مدلها را تعیین کنید.

۲۹. مقادیر جدول زیر نشان‌دهندهٔ درصد سود خالص شرکتی طی یازده سال است. با استفاده از روش هُلت ـ وینترز و به کمک ضرایب هموارسازی، ٠/٦ = A و ٠/٥ = B درصد سود خالص دو سال آینده را پیش‌بینی کنید.

درصد سود خالص	سال	درصد سود خالص	سال	درصد سود خالص	سال
٨/٥	٩	٦/٣	٥	٨/٤	١
٧/٠	١٠	٧/٩	٦	٧/٤	٢
٥/٧	١١	٧/٧	٧	٧/٤	٣
-	-	٧/١	٨	٧/٢	٤

۳۰. سری زمانی زیر را درنظر بگیرید:

ماه (t)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
تعداد تولید (y_t)	٤١٠	٢٩٠	٤٢٠	٣١٠	٤١٠	٥٨٠	٦٠٠	٩٩٠

الف) مقادیر پیش‌بینی را با استفاده از روش ساده بدون تغییر به دست آورید.

ب) مقادیر پیش‌بینی را با استفاده از روش ساده با ٠/١٥ = k به دست آورید.

ج) مقادیر پیش‌بینی را با استفاده از میانگین متحرک (٢ = m) با دورهٔ جلوتر به دست آورید.

د) مقادیر پیش‌بینی را با استفاده از روش نمو هموار (α = ۰/۲) به دست آورید.
ه) مقادیر پیش‌بینی را با استفاده از روش هُلت ـ وینترز (B = ۰/٤ و A = ۰/۵) به دست آورید.
و) مقادیر پیش‌بینی را با استفاده از روش هُلت ـ وینترز (B = C = ۰/۵ و A = ۰/٤) به دست آورید.
ز) معادلهٔ رگرسیون خطی را برحسب t بنویسید و مقادیر پیش‌بینی را پیدا کنید.
ح) شاخص صحت را برای هریک مدلهای فوق محاسبه کرده، تعیین کنید بهترین مدل کدام است؟

۳۱. جدول زیر شاخص صنعت را در کشوری طی یک دورهٔ پانزده ساله نشان می‌دهد.

سال	شاخص	سال	شاخص	سال	شاخص
۱	۷۹	٦	۸۸	۱۱	۹۱
۲	۷٤	۷	۸۵	۱۲	۱۰۰
۳	۷۸	۸	۸۷	۱۳	۱۰۰
٤	۸۰	۹	۷۹	۱٤	۱۰٦
۵	۸۳	۱۰	۸٤	۱۵	۱۱۲

از روش هُلت ـ وینترز برای به دست آوردن مقادیر سه ماه بعد استفاده کنید (B=۰/٤ و A=۰/٤).

پاسخنامهٔ سؤالات

۱) غ	۲) ص	۳) غ	٤) ص
۵) غ	٦) غ	۷) ص	۸) غ
۹) ص	۱۰) غ	۱۱) ج	۱۲) ب
۱۳) د	۱٤) د	۱۵) ج	۱٦) د
۱۷) الف	۱۸) الف	۱۹) ج	۲۰) د
۲۱) الف	۲۲) ب	۲۳) ب	

فصل هجدهم

نظریهٔ تصمیم

۱ـ۱۸ مقدمه

موفقیتها و شکستهایی که فردی یا سازمانی در طول عمر خود تجربه می‌کند تا حد زیادی به تصمیماتی که می‌گیرد، بستگی دارد. نظریهٔ تصمیم، شیوه‌ای تحلیلی و منظم در مطالعهٔ تصمیم‌گیری است. حال این سؤال مطرح می‌شود که چه تفاوتی بین تصمیمات خوب و بد وجود دارد؟ تصمیم خوب، تصمیمی است که بر مبنای منطق اتخاذ می‌شود، تمام داده‌های موجود و گزینه‌های ممکن را در نظر می‌گیرد و شیوه‌های کمّی را ـ که مصمم به بیان آنها هستیم ـ به کار می‌برد. گاهی یک تصمیم خوب به یک نتیجه نامطلوب منجر می‌شود، ولی اگر تصمیم خوبی بوده باشد، هنوز هم خوب است. برعکس تصمیم بد، تصمیمی است که بر مبنای منطق اتخاذ نمی‌شود، از تمام داده‌های موجود استفاده نمی‌کند، تمام گزینه‌ها را در نظر نمی‌گیرد و از شیوه‌های کمّی مناسب آن تصمیم استفاده نمی‌کند. اگر تصمیم بدی گرفته شود، ولی نتیجهٔ خوبی را به دنبال داشته باشد، هنوز هم بد است. بنابراین اگرچه تصمیمات خوب گاهی نتایج بدی را به دنبال دارد، ولی در بلند مدت استفاده از نظریهٔ تصمیم، نتایج موفقیت‌آمیزی را به همراه خواهد داشت.

۲ـ۱۸ شش گام در نظریهٔ تصمیم

اگر شما بخواهید موهایتان را کوتاه کنید، یا یک دوربین نو بخرید و یا یک کارخانهٔ عظیم بسازید، گامهایی در تصمیم شما وجود دارد که اساساً مشابه هستند و عبارتند از:

۱. تعریف روشن از مسأله‌ای که با آن مواجهید،

۲. تعیین گزینه‌های[1] ممکن،

1. alternatives

۳. تعیین پیامدهای[1] ممکن،
٤. تعیین بازده یا سود برای هر ترکیب گزینه ـ حالت طبیعت،
۵. انتخاب یکی از مدلهای کمّی نظریهٔ تصمیم،
٦. به کارگیری مدل و اتخاذ تصمیم.

در گام اول مسأله روشن می‌شود، در گام دوم گزینه‌های ممکن برای مسأله مشخص می‌شود. منظور از گزینه‌ها راه‌حلهای مختلف یا استراتژیهای ممکن برای حل مسأله است. اگر برای مسأله‌ای K گزینه وجود داشته باشد، آنها را با a_1، a_2، ... و a_k نشان می‌دهیم. یکی از بزرگترین خطاهایی که تصمیم‌گیرندگان مرتکب می‌شوند، نادیده گرفتن بعضی از گزینه‌های مهم است. گرچه گزینه خاصی ممکن است بی‌اهمیت به نظر رسد، ولی در عمل یکی از بهترین گزینه‌های موجود باشد.

در گام سوم پیامدهای ممکن یا حالات طبیعت[2]، مشخص می‌شود. منظور از پیامدها یا حالات طبیعت، متغیرهای غیرقابل کنترل در تصمیم است. مثلاً اگر شما بخواهید از منزل به محل کار بروید می‌توانید مسیری از بین مسیرهای موجود را انتخاب کنید (گزینه‌ها)، ولی میزان ترافیک مسیرها (حالات طبیعت) تحت کنترل شما نیست. اگر در مسأله‌ای H حالت طبیعت وجود داشته باشد آنها را با s_1، s_2، ... و s_H نشان می‌دهیم.

در گام چهارم، بازده ناشی از انتخاب گزینه (i) و حالت طبیعت (j) ـ که آن را با M_{ij} نشان می‌دهیم ـ را برآورد کرده و در جدولی که به جدول بازده[3] یا جدول تصمیم[4] معروف است یادداشت می‌کنیم. شکل کلی جدول بازده به صورت جدول ۱ـ۱۸ است.

جدول ۱ـ۱۸ شکل کلی جدول بازده

گزینه‌ها	حالات طبیعت			
	s_1	s_2	...	s_H
a_1	M_{11}	M_{12}	...	M_{1H}
a_2	M_{21}	M_{22}	...	M_{2H}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_K	M_{K1}	M_{K2}	...	M_{KH}

1. outcomes
2. states of nature
3. payoff table
4. decision table

در گام پنجم و ششم ـ که در قسمت ۳ـ۱۸ به بعد مطرح می‌شود ـ یکی از مدلهای مناسب آن تصمیم، انتخاب و سپس تصمیم بهینه مشخص می‌شود.

مثال ۱ـ۱۸ شرکتی برای تولید محصولی جدید می‌تواند از یکی از سه فرایند A، B یا C استفاده کند. میزان تقاضا برای این محصول در آینده مشخص نیست. برای سادگی، شرکت تقاضای بالقوه را به تقاضای کم، متوسط و زیاد رده‌بندی کرده است. میزان سود سالانهٔ برآوردی ناشی از هر ترکیب فرایند تولیدی و سطح تقاضا در جدول ۲ـ۱۸ نشان داده شده است.

جدول ۲ـ۱۸ جدول بازده تولید محصول جدید
(ارقام به هزار ریال)

فرایندهای تولیدی	سطوح تقاضا		
	کم	متوسط	زیاد
A	۷۰	۱۲۰	۲۰۰
B	۸۰	۱۲۰	۱۸۰
C	۱۰۰	۱۲۵	۱٦۰

در این مثال گزینه‌ها، فرایندهای تولیدی (A، B و C) و حالات طبیعت، سطوح تقاضا (کم، متوسط و زیاد) است.

مثال ۲ـ۱۸ شرکتی می‌خواهد دربارهٔ تعداد تولید محصول فاسدشدنی خود برای ماه آینده تصمیم بگیرد. این شرکت می‌تواند ۵۰۰، ٦۰۰ و یا ۷۰۰ واحد از محصول را تولید کند و تصور می‌کند تقاضای این محصول یکی از سطوح مذکور است. هزینه‌های ثابت تولید ۱ میلیون ریال، هزینه متغیر هر واحد محصول ٤ هزار ریال و قیمت فروش هر واحد ٦ هزار ریال است. شرکت می‌تواند هر تعداد از محصولی که تا پایان ماه به فروش نرسد به قیمت ۳ هزار ریال به حراج بگذارد که تمامی آنها به فروش خواهد رسید. جدول بازده را برای تولید این محصول تشکیل دهید.

جدول ۳ـ۱۸ جدول بازده مثال ۲ـ۱۸ (ارقام به ریال)

سطوح تولید	سطوح تقاضا		
	تقاضای ۵۰۰ واحد	تقاضای ٦۰۰ واحد	تقاضای ۷۰۰ واحد
تولید ۵۰۰ واحد	۰	۰	۰
تولید ٦۰۰ واحد	۱۰۰۰۰۰−	۲۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰
تولید ۷۰۰ واحد	۲۰۰۰۰۰−	۱۰۰۰۰۰	٤۰۰۰۰۰

طرز محاسبه بازده‌های مختلف انتخابی:

سود ناشی از تولید ۵۰۰ و تقاضای ۵۰۰ = (۵۰۰ × ۶۰۰۰) − (۴۰۰۰ × ۵۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰) = ۰ ریال

سود ناشی از تولید ۷۰۰ و تقاضای ۵۰۰ = (۵۰۰ × ۶۰۰۰ + ۲۰۰ × ۳۰۰۰) − (۴۰۰۰ × ۷۰۰ + ۱۰۰۰) = −۲۰۰۰۰۰ ریال

سود ناشی از تولید ۷۰۰ و تقاضای ۷۰۰ = (۷۰۰ × ۶۰۰۰) − (۴۰۰۰ × ۷۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰) = ۴۰۰۰۰۰ ریال

تمرین

۱. شرکت پنیرسازی سپید، که تولیدکننده پنیرهای مختلف است، نوعی پنیر تولید می‌کند که به خرده‌فروشیها می‌فروشد. تقاضای این نوع پنیر ممکن است ۶۰، ۷۰، ۸۰ و یا ۹۰ حلب در ماه باشد. هزینه تهیه هر حلب پنیر ۴۵ هزار ریال و بهای فروش هر حلب ۹۵ هزار ریال است. پنیرهایی که تا پایان ماه به فروش نرسند قابل استفاده نبوده و دور ریخته می‌شوند. جدول تصمیم (بازده) را برای سود این نوع پنیر تشکیل دهید.

۲. یک گاوداری در مجاورت شرکت شیر پاستوریزه‌ای قرار دارد. تولید هر لیتر شیر برای این گاوداری ۷۵۰ ریال هزینه دارد و هر لیتر شیر را به قیمت ۱۵۰۰ ریال به مراجعان می‌فروشد. اگر در پایان روز شیری باقی مانده باشد (تولید بیشتر از تقاضای مراجعان باشد) آن را به قیمت لیتری ۳۰۰ ریال به شرکت شیر پاستوریزه می‌فروشد. تقاضای روزانه مراجعان ۱ هزار، ۲ هزار، و ۳ هزار لیتر برآورد می‌شود. سیاست این گاوداری ارضای تقاضای مراجعان است. اگر میزان عرضه شیر کمتر از تقاضای آنها باشد، این گاوداری آن میزان را از جای دیگری به قیمت ۱۷۰۰ ریال تهیه و در اختیار آنها (با همان قیمت ۱۵۰۰ ریال) قرار می‌دهد. جدول بازده را برای این مسأله تشکیل دهید.

۱۸ـ۳ انواع شرایط تصمیم‌گیری

تصمیماتی که افراد می‌گیرند بسته به میزان دانش و اطلاعات آنها در آن وضعیت به سه دسته تقسیم می‌شود: تصمیم‌گیری در شرایط اطمینان[1]، عدم اطمینان[2] و ریسک[3].

۱. **تصمیم‌گیری در شرایط اطمینان کامل.** در این شرایط تصمیم‌گیرندگان بااطمینان پیامدهای هر گزینه یا تصمیمی را می‌دانند، بنابراین گزینه‌ای را انتخاب می‌کنند که منافع آنها را حداکثر کند. مثال ۳ـ۱۸ مثالی برای تصمیم‌گیری در شرایط اطمینان

1. certainty
2. uncertainty
3. risk

کامل است.

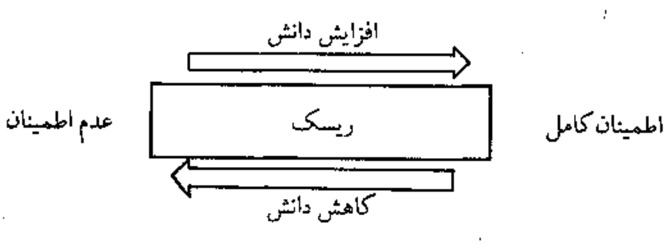
مثال ۳ـ۱۸ فرض کنید شما یک میلیون ریال در اختیار دارید که می‌توانید آن را در اوراق مشارکت با ۲۰ درصد سود سالانه یا در بانک با افتتاح حساب سرمایه گذاری کوتاه مدت با میزان ۸ درصد برای یک دوره یکساله سرمایه گذاری کنید. اگر هر دو سرمایه گذاری مطمئن باشد بهترین تصمیم چیست؟

بدیهی است که سود حاصل از سرمایه گذاری در اوراق مشارکت و حساب سرمایه گذاری کوتاه مدت به ترتیب ۲۰۰ هزار و ۸۰ هزار ریال خواهد بود. بنابراین سرمایه گذاری در اوراق مشارکت ترجیح داده می‌شود.

۲. تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان. در این نوع تصمیم‌گیری، تصمیم‌گیرنده نمی‌داند کدام یک از حالات طبیعت رخ می‌دهد در ضمن نمی‌تواند احتمال وقوع هریک را مشخص کند. مثلاً معلوم نیست در سه دورهٔ آینده رئیس جمهور چه کسی خواهد بود.

۳. تصمیم‌گیری در شرایط ریسک. در این شرایط تصمیم‌گیرنده نمی‌داند کدام یک از حالات طبیعت واقع می‌شود، ولی می‌تواند احتمال وقوع هریک را مشخص کند. مثلاً در پرتاب یک سکه مشخص نیست شیر می‌آید یا خط، ولی احتمال وقوع هرکدام مشخص است ($\frac{1}{2}$).

در شکل ۱ـ۱۸ انواع شرایط تصمیم‌گیری به تصویر کشیده شده است.



شکل ۱ـ۱۸ انواع شرایط تصمیم‌گیری

کمتر مدیرانی پیدا می‌شوند که نسبت به حالات طبیعت تصمیم‌گیری خود اطمینان کامل داشته باشند. به همین دلیل در ادامهٔ این فصل تنها به ذکر بعضی از مدلهای کمّی مناسب برای تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان و ریسک می‌پردازیم.

۴ـ۱۸ تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان

گفته شد که تصمیم‌گیرنده در این نوع تصمیم‌گیری نمی‌داند که کدام یک از حالات طبیعت واقع می‌شود در ضمن نمی‌تواند احتمال وقوع هریک از آنها را مشخص کند. مثلاً اگر در مثال ۱ـ۱۸ تصمیم‌گیرنده نتواند احتمال وقوع تقاضای کم، متوسط و زیاد را مشخص کند. این تصمیم، تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان است.

مهمترین معیارهای تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان عبارتند از:

۱. حداکثر حداکثر[1]،

۲. حداکثر حداقل[2]،

۳. احتمالات مساوی[3]،

۴. واقعگرایی[4]،

۵. حداقل حداکثر غبن[5].

چهار معیار اول را می‌توان به طور مستقیم از جدول تصمیم حساب کرد در حالی که معیار حداقل حداکثر نیاز به استفاده از جدول دیگری دارد.

۱ـ۴ـ۱۸ معیار حداکثر حداکثر

معیار حداکثر حداکثر به دنبال گزینه‌ای است که حداکثر بازده گزینه‌های مختلف را حداکثر کند. روش پیدا کردن بهترین گزینه براساس این معیار آن است که ابتدا حداکثر هر سطر را حساب و در ستونی یادداشت می‌کنیم، سپس حداکثر مقدار ستون را مشخص و گزینه متناظر با آن به عنوان گزینه بهینه انتخاب می‌شود. این معیار به معیار «خوش‌بینانه» معروف است، زیرا تصمیم‌گیرنده تصور می‌کند بهترین حالت طبیعت اتفاق می‌افتد.

مثال ۴ـ۱۸ با استفاده از داده‌های مثال ۱ـ۱۸ بهترین گزینه با معیار حداکثر حداکثر را مشخص کنید.

---

1. maximax
2. maximin
3. equal probabilities
4. realistic
5. minimax regret

جدول ۱۸ـ۴ تصمیم‌گیری با معیار حداکثر حداکثر

فرایندهای تولیدی	سطوح تقاضا: کم	متوسط	زیاد	حداکثر سطر
A	۷۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰ ← حداکثر حداکثر
B	۸۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰
C	۱۰۰۰۰۰	۱۲۵۰۰۰	۱۶۰۰۰۰	۱۶۰۰۰۰

بهترین گزینه با معیار حداکثر حداکثر فرایند تولیدی A است.

۱۸ـ۴ـ۲ معیار حداکثر حداقل

این معیار به دنبال گزینه‌ای است که حداقل پیامدهای مختلف را حداکثر کند. روش پیدا کردن بهترین گزینه براساس این معیار آن است که ابتدا حداقل هر سطر را حساب و در ستونی یادداشت می‌کنیم. سپس حداکثر مقدار ستون را مشخص و گزینه متناظر با آن به عنوان گزینه بهینه انتخاب می‌شود. این معیار به معیار «بدبینانه» معروف است، زیرا تصمیم‌گیرنده تصور می‌کند بدترین حالت ممکن اتفاق می‌افتد.

مثال ۱۸ـ۵ با استفاده از داده‌های مثال ۱۸ـ۱ بهترین گزینه با معیار حداکثر حداقل رامشخص کنید.

جدول ۱۸ـ۵ تصمیم‌گیری با معیار حداکثر حداکثر

فرایندهای تولیدی	سطوح تقاضا: کم	متوسط	زیاد	حداقل سطر
A	۷۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۷۰۰۰۰
B	۸۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰	۸۰۰۰۰
C	۱۰۰۰۰۰	۱۲۵۰۰۰	۱۶۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰ ← حداکثر حداقل

بهترین گزینه با معیار حداکثر حداقل فرایند تولیدی C است.

۱۸ـ۴ـ۳ معیار احتمالات مساوی

معیار احتمالات مساوی، که گاهی معیار لاپلاس[1] نامیده می‌شود، شانس حالات مختلف طبیعت را یکسان فرض می‌کند و بدین سبب دنبال گزینه‌ای می‌گردد که متوسط بازده آن از بقیه گزینه‌ها بیشتر باشد. برای پیدا کردن بهترین گزینه براساس این معیار، ابتدا متوسط

1. Laplace criterion

هر سطر را حساب و در ستونی یادداشت می‌کنیم. سپس حداکثر مقدار ستون را مشخص و گزینه متناظر آن را تعیین می‌کنیم.

مثال ۶ـ۱۸ با استفاده از داده‌های مثال ۱ـ۱۸ بهترین گزینه را با معیار احتمالات مساوی (لاپلاس) مشخص کنید.

جدول ۶ـ۱۸ تصمیم‌گیری با معیار احتمالات مساوی (لاپلاس)

متوسط سطر	سطوح تقاضا			فرایندهای تولیدی
	زیاد	متوسط	کم	
احتمالات مساوی ← ۳۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۷۰۰۰۰	A
۱۲۶۶۶۷	۱۸۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۸۰۰۰۰	B
۱۲۸۳۳۳	۱۶۰۰۰۰	۱۲۵۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	C

بهترین گزینه با معیار احتمالات مساوی (لاپلاس) فرایند تولیدی A است.

۴ـ۴ـ۱۸ معیار واقعگرایی

معیار واقعگرایی، که گاهی معیار هوریتز[1] نامیده می‌شود، بر این اصل مبتنی است که یک تصمیم‌گیرندهٔ منطقی کاملاً خوش‌بین یا بدبین نیست از این رو بین دو معیار خوش‌بینانهٔ حداکثر حداکثر و بدبینانهٔ حداکثر حداقل تعادلی برقرار می‌کند، بدین صورت که ابتدا ضریب خوش‌بینی تصمیم‌گیرنده، که آن را با α نشان می‌دهیم، حدس زده می‌شود؛ مقدار این ضریب بین ۰ و ۱ است ($۰ \leq \alpha \leq ۱$). زمانی که $\alpha = ۱$ باشد، تصمیم‌گیرنده کاملاً خوش‌بین و زمانی که $\alpha = ۰$ باشد، تصمیم‌گیرنده کاملاً بدبین است. حد وسط این فاصله نشان می‌دهد که تصمیم‌گیرنده پیش‌بینی خاصی در مورد آینده ندارد. فرمول این معیار بدین صورت است:

(حداقل بازده گزینه i) $(۱ - \alpha)$ + (حداکثر بازده گزینه i) α = معیار واقعگرایی گزینه i

معیار واقعگرایی برای هر گزینه حساب و سپس گزینه‌ای انتخاب می‌شود که بیشترین مقدار را به خود اختصاص دهد.

مثال ۷ـ۱۸ با استفاده از داده‌های مثال ۱ـ۱۸ بهترین گزینه را با معیار واقعگرایی مشخص کنید. ضریب خوش‌بینی تصمیم‌گیرنده را ۰/۷ در نظر بگیرید.

1. Hurwicz criterion

جدول ۱۸.۷ تصمیم‌گیری با معیار واقعگرایی (هوریتز)

معیار واقعگرایی	سطوح تقاضا			فرایندهای تولیدی
	زیاد	متوسط	کم	
معیارواقعگرایی ← ۰/۷ (۲۰۰۰۰۰) + ۰/۳ (۷۰۰۰۰) = ۱۶۱۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۷۰۰۰۰	A
۰/۷ (۱۸۰۰۰۰) + ۰/۳ (۸۰۰۰۰) = ۱۵۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۸۰۰۰۰	B
۰/۷ (۱۶۰۰۰۰) + ۰/۳ (۱۰۰۰۰۰) = ۱۴۲۰۰۰	۱۶۰۰۰۰	۱۲۵۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	C

بهترین گزینه با معیار واقعگرایی (با $\alpha =$ ۰/۷) فرایند تولیدی A است.

۱۸ـ۴ـ۵ معیار حداقل حداکثر غبن

آخرین معیاری که مطرح می‌کنیم معیار حداقل حداکثر غبن است. تصمیم‌گیرنده‌ای که می‌خواهد از این معیار استفاده کند باید تصور کند که پس از انتخاب یکی از گزینه‌ها، یکی از حالات طبیعت واقع شده است. میزان غبن عبارت است از تفاوت بازده بهترین گزینه و گزینه انتخاب شده. مثال ۱ـ۱۸ را در نظر بگیرید. فرض کنید تصمیم‌گیرنده، گزینه A را انتخاب کرده و میزان تقاضا کم باشد، در این صورت میزان دریافتی‌اش ۷۰ هزار ریال است. در صورتی که اگر میزان تقاضا کم باشد بهتر آن است که گزینه C را انتخاب و بازده‌ای معادل ۱۰۰ هزار ریال دریافت کند. بنابراین اگر میزان تقاضا کم و او گزینهٔ A را انتخاب کرده باشد، میزان غبن وی ۳۰ هزار ریال خواهد بود:

$$۱۰۰۰۰۰ - ۷۰۰۰۰ = ۳۰۰۰۰$$

حال تصور کنید میزان تقاضا کم، ولی او گزینه B را انتخاب کرده باشد، در این صورت وی مبلغ ۲۰ هزار ریال مغبون شده است.

$$۱۰۰۰۰۰ - ۸۰۰۰۰ = ۲۰۰۰۰$$

بدیهی است در صورتی که میزان تقاضا کم و او گزینه C را انتخاب کرده باشد، حسرت گذشته را نخواهد خورد، زیرا میزان غبن وی صفر است.

$$۱۰۰۰۰۰ - ۱۰۰۰۰۰ = ۰$$

برای انتخاب بهترین گزینه بر مبنای معیار حداقل حداکثر غبن، ابتدا جدولی به نام «جدول غبن»[1] را، که به آن «جدول هزینه فرصت از دست رفته»[2] نیز می‌گویند،

1. regret table
2. opportunity loss table

تشکیل می‌دهیم. سپس حداکثر هر سطر را مشخص کرده و در نهایت حداقل آنها را تعیین می‌کنیم و گزینه متناظر با آن را انتخاب می‌کنیم.

مثال ۸ـ۱۸ با استفاده از داده‌های مثال ۱ـ۱۸ بهترین گزینه را با معیار حداقل حداکثر غبن مشخص کنید.

جدول ۸ـ۱۸ تصمیم‌گیری با معیار حداقل حداکثر غبن

فرایندهای تولیدی	سطوح تقاضا			حداکثر سطر	
	کم	متوسط	زیاد		
A	۳۰۰۰۰	۵۰۰۰	۰	۳۰۰۰۰	
B	۲۰۰۰۰	۵۰۰۰	۲۰۰۰۰	۲۰۰۰۰	← حداقل حداکثر
C	۰	۰	۴۰۰۰۰	۴۰۰۰۰	

بهترین گزینه با معیار حداقل حداکثر غبن، فرایند تولیدی B است.

تمرین

۱. سرمایه‌گذاری مایل است از بین سه گزینه ـ حساب پس‌انداز کوتاه مدت، سهام پر ریسک و سهام کم ریسک ـ گزینه‌ای را برای سرمایه‌گذاری مبلغ یک میلیون ریالی خود انتخاب کند. وی حالات مختلف طبیعت را به این صورت تقسیم‌بندی کرده است: s_1: ترقی بازار سهام، s_2: ثبات بازار سهام، s_3: تنزل بازار سهام، و جدول بازده (به هزار ریال) چنین برآورد شده است:

گزینه‌ها	حالات طبیعت		
	s_1	s_2	s_3
حساب پس‌انداز کوتاه مدت	۸۰۰	۸۰۰	۸۰۰
سهام پر ریسک	۱۸۰۰	۱۲۰	−۱۰۰۰
سهام کم ریسک	۱۲۰۰	۴۰۰	−۴۰۰

تعیین کنید:

الف) این نوع تصمیم‌گیری، تصمیم‌گیری در چه شرایطی است؟

ب) براساس معیار حداکثر حداکثر بهترین گزینه چیست؟

ج) براساس معیار حداکثر حداقل بهترین گزینه چیست؟

د) براساس معیار احتمالات مساوی بهترین گزینه چیست؟

هـ) براساس معیار واقعگرایی (با $\alpha = ۰/۶$) بهترین گزینه چیست؟

و) براساس معیار حداقل حداکثر غبن بهترین گزینه کدام است؟

۲. یک شیرینی‌پزی در ابتدای اسفند می‌خواهد دربارهٔ میزان پخت شیرینی برای عید تصمیم بگیرد. این شیرینی‌پزی در اواسط امسال تأسیس شده و اطلاعی دربارهٔ میزان تقاضای شیرینی عید این محله ندارد، ولی حدس می‌زند میزان درخواست شیرینی برای عید چیزی بین ۲۰۰ تا ۴۰۰ کیلو باشد. بدین سبب تصمیم گرفته است ۲۰۰، ۳۰۰ و یا ۴۰۰ کیلو شیرینی بپزد. فرض کنید میزان تقاضا نیز یکی از این سه مقدار باشد. هزینه تهیه هر کیلو شیرینی ۵۰۰۰ ریال و قیمت فروش آن ۷۵۰۰ ریال است. اگر تا ۱۳ فروردین سال بعد شیرینی‌ای باقی بماند می‌تواند آنها را به مواد اولیهٔ ترکیبی تبدیل کند که ارزش آن هر کیلو ۳۷۵۰ ریال خواهد بود.

الف) جدول بازده را برای این مسأله تهیه کنید.

ب) این تصمیم‌گیری، چه نوع تصمیم‌گیری است؟

ج) بر مبنای معیارهای حداکثر حداکثر، حداکثر حداقل، واقعگرایی (با $\alpha = ۰/۸$) و همچنین حداقل حداکثر غبن بهترین میزان پخت چیست؟

۱۸ـ۵ تصمیم‌گیری در شرایط ریسک

در صورتی که تصمیم‌گیرنده بتواند احتمال وقوع حالات مختلف طبیعت را برای مسألهٔ تصمیم، تعیین کند، تصمیم‌گیری از نوع ریسک خواهد بود. مثلاً در مثال ۱ـ۱۸ اگر بتوان گفت که احتمال وقوع تقاضای کم، متوسط و زیاد چقدر است و یا داده‌هایی در دسترس باشد که بتوان با استفاده از آنها احتمال هر سطح تقاضا را تعیین کرد، تصمیم‌گیری از نوع تصمیم‌گیری در شرایط ریسک خواهد بود.

مهمترین معیار تصمیم‌گیری در شرایط ریسک، «معیار ارزش پولی مورد انتظار» (EMV)[1] است. ارزش پولی مورد انتظار همان امید ریاضی[2] بازده است.

تصور کنید تصمیم‌گیرنده‌ای k گزینهٔ ممکن a_1، a_2، ...، و a_k داشته و با H حالت طبیعت s_1، s_2، ...، و s_H مواجه باشد. اگر M_{ij} بازده ناشی از انتخاب گزینه i و وقوع حالت

---

1. expected monetary value

۲. امید ریاضی در فصل ششم، جلد اول همین کتاب توضیح داده شده است.

طبیعت j بوده و p_j احتمال وقوع jامین حالت طبیعت باشد (به طوری که $\Sigma p_j = 1$)، آنگاه ارزش پولی مورد انتظار گزینه a_i، $EMV\ (a_i)$، به صورت زیر حساب می‌شود:

$$EMV\ (a_i) = P_1 M_{i1} + P_2 M_{i2} + \ldots + P_H M_{iH} = \sum_{j=1}^{H} P_j M_{ij}$$

مثال ۹ـ۱۸ جدول بازده مثال ۱ـ۱۸ در زیر آورده شده است. فرض کنید شرکتی می‌داند که ۱۰ درصد تمام محصولات مشابه قبلی مواجه با تقاضای کم، ۵۰ درصد با تقاضای متوسط و ۴۰ درصد مواجه با تقاضای زیاد بوده‌اند ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). بهترین گزینه در این شرایط چیست؟

جدول ۹ـ۱۸ جدول بازده (ارقام به هزار ریال)

فرایندهای تولیدی	سطوح تقاضا		
	کم ($p_1 = ۰/۱$)	متوسط ($p_2 = ۰/۵$)	زیاد ($p_3 = ۰/۴$)
A	۷۰	۱۲۰	۲۰۰
B	۸۰	۱۲۰	۱۸۰
C	۱۰۰	۱۲۵	۱۶۰

چون احتمال وقوع هر حالت مشخص است، تصمیم‌گیری از نوع تصمیم‌گیری در شرایط ریسک بوده و می‌توان از معیار EMV استفاده کرد (ارقام به ریال).

$$EMV\ (A) = (۰/۱)\ (۷۰۰۰۰) + (۰/۵)\ (۱۲۰۰۰۰) + (۰/۴)\ (۲۰۰۰۰۰) = ۱۴۷۰۰۰$$

$$EMV\ (B) = (۰/۱)\ (۸۰۰۰۰) + (۰/۵)\ (۱۲۰۰۰۰) + (۰/۴)\ (۱۸۰۰۰۰) = ۱۴۰۰۰۰$$

$$EMV\ (C) = (۰/۱)\ (۱۰۰۰۰۰) + (۰/۵)\ (۱۲۵۰۰۰) + (۰/۴)\ (۱۶۰۰۰۰) = ۱۳۶۵۰۰$$

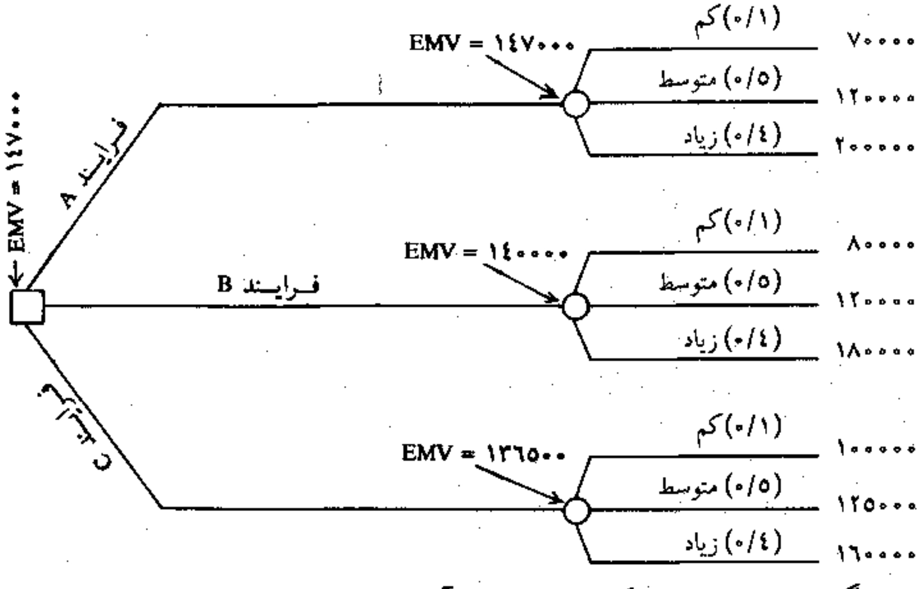
گزینهٔ برتر، فرایند تولیدی A است، زیرا سود مورد انتظار آن از بقیه گزینه‌ها بیشتر است.

۱ـ۵ـ۱۸ درخت تصمیم

هر مسأله تصمیمی را که بتوان با EMV حل کرد، آن را بسادگی می‌تواند با

«درخت تصمیم»[1] نیز نشان داد و بهترین گزینه را انتخاب کرد. در درخت تصمیم، نماد مربع (□) نشان‌دهندهٔ یک نقطه تصمیم است. یعنی در این زمان تصمیم‌گیرنده باید یکی از گزینه‌های موجود را انتخاب کند. نماد دایره (○) نشان می‌دهد که در این هنگام یکی از حالات مختلف طبیعت رخ می‌دهد. در درخت تصمیم بازهم از معیار EMV استفاده می‌شود.

مثال ۱۰ـ۱۸ داده‌های مثال ۹ـ۱۸ را در نظر گرفته، با استفاده از درخت تصمیم، بهترین گزینه را مشخص کنید (ارقام به ریال).



بهترین گزینه فرایند تولید A است که بازده مورد انتظار آن ۱٤۷ هزار ریال است.

شکل ۲ـ۱۸ درخت تصمیم مثال ۱۰ـ۱۸

مثال ۱۱ـ۱۸ فردی ۱۰ میلیون ریال در اختیار دارد و می‌خواهد آن را در حساب سرمایه‌گذاری کوتاه مدت با میزان سود ۱۰ درصد و یا در سهام بورس اوراق بهادار برای یک سال سرمایه‌گذاری کند. پس از یک سال در صورتی که بازار سهام در رونق باشد ٦ میلیون ریال و در صورتی که متعادل باشد ۲ میلیون ریال سود می‌برد و در صورتی که در رکود باشد مبلغ ۵ میلیون ریال ضرر می‌کند. با توجه به روند قیمتهای سهام، احتمال

1. decision tree

رونق، تعادل و رکورد به ترتیب ۰/۳، ۰/۴ و ۰/۳ است.

الف) جدول بازده را برای این مثال تشکیل دهید.

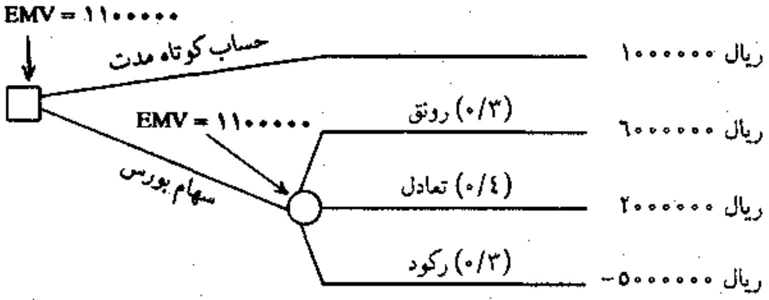
ب) با استفاده از درخت تصمیم، بهترین گزینه را مشخص کنید.

الف)

جدول ۱۸.۱۰ جدول بازده مثال ۱۸ـ۱۱

گزینه‌ها	وضعیت بازار سهام		
	رونق $(p_1 = ۰/۳)$	تعادل $(p_2 = ۰/۴)$	رکود $(p_3 = ۰/۳)$
سرمایه گذاری در حساب کوتاه مدت	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰
سرمایه گذاری در سهام بورس	۶۰۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰۰	-۵۰۰۰۰۰۰

ب)



بهترین گزینه، سرمایه گذاری در سهام بورس است که بازده مورد انتظار آن ۱ میلیون و ۱۰۰ هزار ریال است.

شکل ۱۸.۳ درخت تصمیم مثال ۱۸ـ۱۱

از درخت تصمیم بیشتر در مواقعی استفاده می‌شود که در مسأله‌ای باید تصمیمات «پیچیده» و «متوالی» اتخاذ شود. در این هنگام نقش درخت تصمیم در حل مسأله قابل توجه است.

۱۸ـ۵ـ۲ تحلیل حساسیت

در مثال ۱۸ـ۹ مشخص شد که با معیار EMV باید فرایند تولید A به کار رود. این تصمیم مبتنی بر بازده‌های برآوردی برای ترکیب هر گزینه ـ حالت طبیعت و احتمالات وقوع حالات مختلف طبیعت است. با وجود این، در اغلب موارد تصمیم‌گیرنده دربارهٔ این بازده‌ها و احتمالات نامطمئن است، از این رو بد نیست مشخص شود تحت چه دامنه‌ای

بایگانی فایل های حسابداری ، حسابرسی ، مالیاتی و مقالات
@Fileaccunting
مدیریت : امین یوسفیان

از مقادیر بازده و یا احتمالات، گزینه‌ای خاص بهترین گزینه باقی می‌ماند. تحلیل حساسیت[1] تلاشی برای پاسخ به سؤال فوق است که در صورت ثابت ماندن بقیه شرایط، یک مقدار بازده و یا احتمال آن تا چه حد می‌تواند نوسان داشته باشد، مشروط بر آنکه جواب قبلی بهینه باقی بماند.

مثال ۱۲ـ۱۸ مثال ۹ـ۱۸ را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید شرکتی دربارهٔ احتمال وقوع تقاضای زیاد نامطمئن است. احتمال وقوع تقاضای کم چقدر باید باشد تا بازهم، گزینه بهینه فرایند A باشد؟

$$EMV(A) = (p)(70000) + (0.6 - p)(120000) + (0.4)(200000) = 152000 - 50000p$$

$$EMV(B) = (p)(80000) + (0.6 - p)(120000) + (0.4)(180000) = 144000 - 40000p$$

$$EMV(C) = (p)(100000) + (0.6 - p)(125000) + (0.4)(160000) = 139000 - 25000p$$

برای اینکه گزینه A بازهم بهینه بماند باید:

$$152000 - 50000p \geq 144000 - 40000p \quad \Rightarrow p \leq 0.80$$

$$152000 - 50000p \geq 139000 - 25000p \quad \Rightarrow p \leq 0.52$$

نتیجه آنکه احتمال تقاضای کم نباید از ۰/۵۲ بیشتر باشد.

مثال ۱۳ـ۱۸ مثال ۹ـ۱۸ را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید شرکتی دربارهٔ بازده ۲۰۰ هزار ریال برای فرایند A تحت تقاضای زیاد نامطمئن است. دامنهٔ نوسانات این مقدار را به گونه‌ای تعیین کنید که فرایند A همچنان بهینه باقی ماند.

$$EMV(A) = (0.1)(70000) + (0.5)(120000) + 0.4M = 67000 + 0.4M$$

در مثال ۹ـ۱۸ داشتیم $EMV(B) = 140000$ و $EMV(C) = 136500$. در صورتی که فرایند A بخواهد بهینه باقی ماند باید ارزش پولی مورد انتظارش بیشتر و یا مساوی ۱۴۰ هزار ریال باشد،

$$67000 + 0.4M \geq 140000 \quad \Rightarrow M \geq 182500$$

1. sensitivity analysis

پس بازده فرایند A تحت تقاضای زیاد دست‌کم باید ۱۸۲۵۰۰ ریال باشد.

تمرین

۱. مدیری ناچار است از بین دو استراتژی ممکن (a_1 و a_2) در وضعیتی که سه حالت مختلف طبیعت وجود دارد (s_1، s_2 و s_3) یکی را انتخاب کند (جدول بازده در زیر آورده شده است). اگر احتمال وقوع حالت اول، دوم و سوم به ترتیب ۰/۲، ۰/۴ و ۰/۴ باشد، بهترین استراتژی چیست؟ درخت تصمیم را رسم کنید.

گزینه‌ها	حالات طبیعت		
	s_1	s_2	s_3
a_1	۷۲۰۰۰−	۴۵۰۰۰	۱۲۰۰۰۰
a_2	۲۵۰۰۰−	۲۰۰۰۰	۵۰۰۰۰

۲. در تمرین ۱، نوسانات مجاز ۵۰ هزار (بازده گزینه a_2 تحت حالت s_3) را طوری تعیین کنید تا بازهم استراتژی بهینه تمرین ۱، بهینه باقی ماند.

۳. در تمرین ۱، احتمال وقوع حالت طبیعت s_2 چقدر می‌تواند نوسان یابد تا بازهم گزینه بهینه تمرین ۱، بهینه باقی ماند؟

۴. مقاطعه کاری می‌خواهد دربارهٔ شرکت در مناقصه یک پروژه ساختمانی تصمیم بگیرد. هزینه تهیه برآورد قیمت پیشنهاد در مناقصه ۱ میلیون و ۴۰۰ هزار ریال است (اگر در مناقصه شرکت کند خواه برنده شود یا نه متحمل این هزینه می‌شود). مقاطعه کار در صورتی در مناقصه شرکت خواهد کرد که در صورت برنده شدن سودی معادل ۱۰ میلیون ریال (با کسر هزینه تهیه برآورد قیمت پیشنهادی) دریافت کند. براساس سوابق موجود، ۲۰ درصد از موارد، قیمت پیشنهادی وی برنده شده‌اند.

الف) جدول بازده را تشکیل دهید.

ب) براساس ارزش پولی مورد انتظار، آیا شرکت در مناقصه را به او توصیه می‌کنید؟

ج) درخت تصمیم را رسم کنید.

۵. پنج‌شنبه شب مدیر یک آژانس کرایه اتومبیل شش اتومبیل برای کرایه روز بعد در اختیار دارد. با این حال او می‌تواند اتومبیلهای دیگری را، با هزینه ۱۰۰ هزار ریال برای هر اتومبیل، تهیه کند. هر اتومبیلی که اجاره داده شود ۲۰۰ هزار ریال، به طور متوسط، سود دارد (هزینه تهیه باید از این مبلغ کم شود). هر مشتری که مراجعه کند و اتومبیلی برای کرایه دادن در اختیار نباشد مبلغ ۵۰ هزار ریال از سرقفلی آژانس کم می‌شود. براساس سوابق جمعه‌های قبل، مدیر آژانس

متوجه شده است که تعداد اتومبیلهای درخواستی بین ٦ تا ١٠ تا بوده است که در جدول زیر درصد آنها مشخص شده است. مدیر آژانس باید تصمیم گیرد چند اتومبیل دیگر (علاوه بر شش اتومبیل موجود) تهیه کند.

تعداد درخواستها	٦	٧	٨	٩	١٠
درصد مواقع	١٠	٣٠	٣٠	٢٠	١٠

الف) جدول بازده تشکیل دهید.

ب) با استفاده از معیار ارزش پولی مورد انتظار، باید چند اتومبیل دیگر تهیه شود.

۱۸ـ٦ ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل

در مثال ۹ـ۱۸ مشخص شد که بهترین فرایند با معیار EMV، فرایند A است. فرض کنید شرکت بازاریابی علمی به شرکت تصمیم‌گیرنده پیشنهاد کرده است که می‌تواند وی را در تصمیم‌گیری کمک کند. پس از بررسی بازار، شرکت بازاریابی علمی «با اطمینان» به شرکت موردنظر خواهد گفت که آیا تقاضا برای این محصول جدید کم است، زیاد است و یا متوسط است. به عبارت دیگر اطلاعات این شرکت، شرایط را از تصمیم‌گیری در حالت ریسک به تصمیم‌گیری در حالت اطمینان کامل تغییر می‌دهد (فرض کنید شرکت بازاریابی علمی به طور دقیق می‌تواند میزان تقاضا را پیش‌بینی کند و مرتکب خطا نشود). وجود این اطلاعات، که اطلاعات کامل[1] نامیده می‌شود، شرکت تصمیم‌گیرنده را از خطای پرهزینه دور خواهد داشت. حال سؤال این است که «ارزش» این اطلاعات چقدر است؟ ارزش اطلاعات کامل[2] سقفی را که شرکت تصمیم‌گیرنده بابت این اطلاعات می‌تواند بپردازد، مشخص خواهد کرد. در این قسمت دو واژهٔ وابسته مطرح می‌شود: ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل[3] و ارزش مورد انتظار با اطلاعات کامل[4] (EVPI).

1. perfect information
2. value of perfect information
3. expected value of perfect information
4. expected value with perfect information

«ارزش مورد انتظار با اطلاعات کامل» بازده مورد انتظار است اگر اطلاعات کامل قبل از اخذ تصمیم موجود باشند. جدول بازده مثال ۹ـ۱۸ را در نظر بگیرید. فرض کنید شرکت با اطمینان بداند تقاضا کم است، بهترین تصمیمش چه خواهد بود؟ بهترین تصمیم فرایند C است که بازدهی معادل ۱۰۰ هزار ریال خواهد داشت. اگر شرکت با اطمینان بداند تقاضا متوسط است، بهترین تصمیمش بازهم فرایند C است (با بازده ۱۲۵ هزار ریال) و اگر بداند تقاضا زیاد است، بهترین تصمیمش فرایند A است که بازده آن ۲۰۰ هزار ریال است. شرکت بازاریابی علمی با چه احتمالی تقاضای کم، متوسط و زیاد را پیش‌بینی خواهد کرد؟ مشخص است که این احتمالات به ترتیب ۰/۱، ۰/۵ و ۰/٤ است.

تصمیم‌گیرنده‌ای مجبور است گزینه‌ای را از بین K گزینهٔ a_1، a_2،...، a_k، در حالتی که با H حالت طبیعت s_1، s_2، ...، و s_H مواجه است، انتخاب کند و بازده ناشی از انتخاب i امین گزینه و وقوع j امین حالت طبیعت M_{ij} باشد. اگر M_j^* بهترین بازده تمامی گزینه‌های حالت طبیعت j ام و p_j احتمال وقوع حالت طبیعت j ام باشد، آنگاه ارزش مورد انتظار با اطلاعات کامل به صورت زیر حساب می‌شود:

$$EVPI = P_1M_1^* + P_2M_2^* + \dots + P_HM_H^* = \sum_{j=1}^{H} P_jM_j^*$$

و ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل تفاوت بین ارزش مورد انتظار با اطلاعات کامل و ارزش مورد انتظار بهترین گزینه (EMV_{max}) است در صورتی که این اطلاعات موجود نباشد، به عبارت دیگر

$$\text{ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل} = EVPI - EMV_{max}$$

مثال ١٤ـ١٨ جدول بازده مثال ۹ـ۱۸ در زیر آورده شده است. ارزش اطلاعات کامل را حساب کنید.

جدول ۱۸.۱۱ جدول بازده مثال ۹ـ۱۸ (ارقام به هزار ریال)

فرایندهای تولیدی	سطوح تقاضا		
	کم $(p_1 = ۰/۱)$	متوسط $(p_2 = ۰/۵)$	زیاد $(p_3 = ۰/۴)$
A	۷۰	۱۲۰	۲۰۰
B	۸۰	۱۲۰	۱۸۰
C	۱۰۰	۱۲۵	۱۶۰

$$EVPI = (۰/۱)(۱۰۰۰۰۰) + (۰/۵)(۱۲۵۰۰۰) + (۰/۴)(۲۰۰۰۰۰) = ۱۵۲۵۰۰ \text{ ریال}$$

بدون اطلاعات کامل (تحت شرایط ریسک) بهترین گزینه ارزش پولی مورد انتظاری معادل ۱۴۷ هزار ریال داشت، بنابراین:

$$\text{ارزش اطلاعات کامل} = ۱۵۲۵۰۰ - ۱۴۷۰۰۰ = ۵۵۰۰ \text{ ریال}$$

تمرین

۱. شرکتی قصد توسعه کارخانه‌اش را دارد. جدول بازده به صورت زیر است (ارقام به هزار ریال).

گزینه‌ها	حالات طبیعت	
	بازار مساعد $(p_1 = ۰/۴)$	بازار نامساعد $(p_2 = ۰/۶)$
احداث کارخانه بزرگ	۳۰۰	۱۸۰-
احداث کارخانه کوچک	۱۵۰	۵۰-
ادامه وضعیت فعلی	۰	۰

شرکت تحقیقاتی راهبرد به شرکت گفته است که حاضر است با دریافت ۱۰۰ هزار ریال تحقیقات گسترده‌ای دربارهٔ بازار انجام دهد و دقیقاً به شرکت بگوید که آیا بازار مساعد است یا نامساعد. پس از محاسبهٔ ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل، در خصوص این پیشنهاد اظهارنظر کنید.

۲. فردی برای رسیدن به محل کارش می‌تواند از سه مسیر مختلف ۱، ۲ و ۳ استفاده کند. الگوی ترافیک شهر پیچیده است. در طول دو ماه گذشته این فرد سعی کرده است هر مسیر را چندین بار، در شرایط ترافیکی مختلف، طی کند. در جدول زیر نتیجه (برحسب دقیقه) خلاصه شده است.

مسیر	ترافیک کم	ترافیک متوسط	ترافیک سنگین
۱	۱۵	۳۰	٤۵
۲	۲۰	۲۵	۳۵
۳	۳۰	۳۰	۳۰

در ٦۰ روز گذشته، این فرد ۱۰ روز با ترافیک سنگین و ۲۰ روز با ترافیک متوسط مواجه بوده است. فرض کنید این ٦۰ روز نمونه خوبی از الگوی ترافیک باشد.

الف) با معیار EMV مشخص کنید این فرد باید کدام مسیر را انتخاب کند.

ب) این فرد تصمیم دارد رادیویی برای ماشین خود بخرد که از میزان ترافیک، قبل از انتخاب مسیر، مطلع شود؛ با خرید این رادیو و اطلاع از ترافیک در مسیرهای مختلف، به طور متوسط در هر سفر چند دقیقه در وقت خود صرفه‌جویی خواهد کرد؟

۱۸ـ۷ استفاده از اطلاعات نمونه: قضیهٔ بیز

تصمیمات اساسی مدیران در اغلب مواقع مستلزم صرف مبالغ کلان پولی است و هزینه ناشی از اتخاذ تصمیمی غیربهینه می‌تواند قابل توجه باشد. بدین سبب ضرورت دارد مدیران (تصمیم‌گیرندگان) قبل از اینگونه تصمیمات، اطلاعات مرتبطی به دست آورند. مدیران باید سعی کنند قبل از تصمیمات مهم، شانس وقوع حالات مختلف طبیعت، که بازده نهایی را تعیین می‌کند، مشخص کنند.

در فصل پنجم کتاب (جلد اول)، دربارهٔ احتمالات پیشین، احتمالات پسین و قضیهٔ بیز بحث شد. اکنون می‌خواهیم اشاره کنیم که با اطلاعات جدید ـ که «اطلاعات نمونه»[1] نامیده می‌شود و عاری از خطا نیست ـ چگونه می‌توان تصمیم‌گیری را بهبود بخشید.

مثال ۱۵ـ ۱۸ فرض کنید شرکت پیشرو در حال بررسی توسعه کارخانه‌اش به منظور تولید محصول جدیدی است. جدول بازده تولید این محصول مطابق با جدول ۱۲ـ۱۸ است.

1. sample information

جدول ۱۲ـ۱۸ جدول بازده مثال ۱۵ـ۱۸ (ارقام به هزار ریال).

گزینه‌ها	سطوح تقاضا	
	کم (۰/۵)	زیاد (۰/۵)
احداث کارخانه بزرگ	۱۸۰-	۲۰۰
احداث کارخانه کوچک	۲۰-	۱۰۰
عدم توسعه کارخانه	۰	۰

احتمال تقاضای کم و زیاد یکسان است. فرض کنید شرکت اندیشه به شرکت پیشرو پیشنهاد کرده است که حاضر است با دریافت ۱۰ هزار ریال بازار را بررسی کند و نتایج آن را ـ که به صورت مثبت یا منفی خواهد بود (مثبت به معنای پیش‌بینی تقاضای زیاد و منفی به معنای پیش‌بینی کم) ـ در اختیار شرکت پیشرو قرار دهد. نتایج بررسی شرکت اندیشه بدون خطا نیست. با توجه به سوابق پیش‌بینی این شرکت، جدول زیر تهیه شده است:

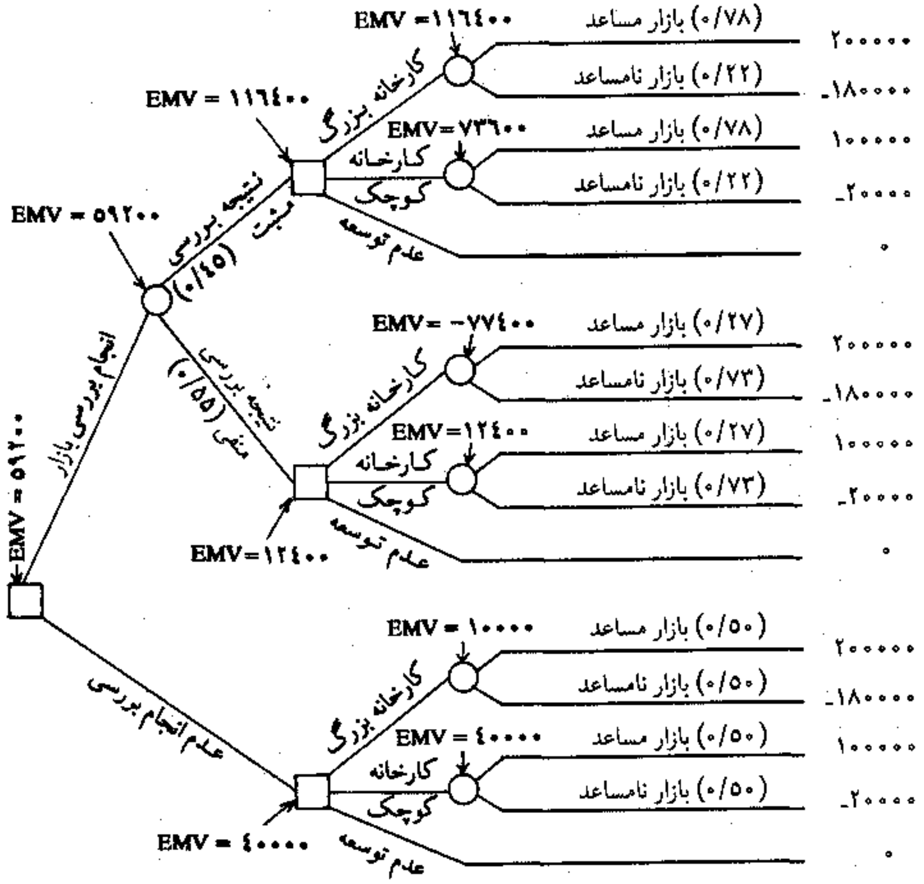
جدول ۱۳ـ۱۸ جدول دقت برآورد پیش‌بینی شرکت اندیشه

نتیجهٔ بررسی	تقاضای کم	تقاضای زیاد
منفی	۰/۸	۰/۳
مثبت	۰/۲	۰/۷

مثلاً احتمال ۰/۸، (تقاضای کم / منفی)p ، نشان می‌دهد که در ۸۰ درصد موارد تقاضا کم بوده، ولی بررسی نتیجه منفی را پیش‌بینی کرده است، و احتمال ۰/۲ نشان می‌دهد که در ۲۰ درصد موارد تقاضا کم، ولی بررسی نتیجه مثبتی را پیش‌بینی کرده است.

با درخت تصمیم مشخص کنید آیا شرکت پیشرو باید از شرکت اندیشه بخواهد که بازار را بررسی کند یا خیر. ارزش این اطلاعات (اطلاعات نمونه) چقدر است؟

شرکت پیشرو در مرحله اول باید تصمیم بگیرد که آیا از شرکت اندیشه بخواهد تا بازار را بررسی کند یا خیر؟ و در مرحله دوم باید با توجه به نتیجه تصمیم اول، دربارهٔ احداث کارخانه بزرگ، کوچک و یا عدم توسعه تصمیم بگیرد. بنابراین درخت تصمیم به صورت شکل ٤ـ۱۸ خواهد بود (ارقام به ریال).



شکل ۱۸.۴ درخت تصمیم برای مثال ۱۵ـ۱۸

با استفاده از قضیهٔ بیز احتمالات پسین (۰/۷۸، ۰/۲۲، ۰/۲۷ و ۰/۷۳) در جداول ۱۸ـ۱۴ و ۱۸ـ۱۵ محاسبه شده‌اند:

جدول ۱۸.۱۴ نحوهٔ محاسبهٔ احتمالات پسین در صورتی که نتیجه بررسی مثبت باشد.

حالات طبیعت	احتمالات شرطی p (حالات طبیعت/بررسی مثبت)		احتمالات پیشین		احتمالات مشترک	احتمالات پسین p (بررسی مثبت/حالت طبیعت)
بازار مساعد	۰/۷	×	۰/۵	=	۰/۳۵	۰/۳۵ / ۰/۴۵ = ۰/۷۸
بازار نامساعد	۰/۲	×	۰/۵	=	۰/۱۰	۰/۱۰ / ۰/۴۵ = ۰/۲۲
		p	(نتیجه بررسی مثبت)	=	۰/۴۵	۱

جدول ۱۸ـ۱۵ نحوهٔ محاسبهٔ احتمالات پسین در صورتی که نتیجه بررسی منفی باشد.

حالات طبیعت	احتمالات شرطی p (حالات طبیعت/بررسی منفی)	احتمالات پیشین	احتمالات مشترک	احتمالات پسین p (بررسی منفی/حالت طبیعت)
بازار مساعد	۰/۳	۰/۵	۰/۱۵	$\frac{۰/۱۵}{۰/۵۵} = ۰/۲۷$
بازار نامساعد	۰/۸	۰/۵ p (نتیجه بررسی منفی) =	$\frac{۰/۴۰}{۰/۵۵}$	$\frac{۰/۴۰}{۰/۵۵} = \frac{۰/۷۳}{۱}$

چنانچه از شکل ۱۸ـ۴ مشخص است در صورتی که بازار بررسی شود EMV = ۵۹۲۰۰ ریال خواهد بود ـ هزینه بررسی به مبلغ ۱۰ هزار ریال از این مبلغ کسر نشده است ـ و در صورت عدم بررسی بازار، EMV = ۴۰۰۰۰ ریال است. بنابراین ارزش مورد انتظار اطلاعات نمونه را می‌توان به صورت زیر حساب کرد:

ریال ۱۹۲۰۰ = ۴۰۰۰۰ − ۵۹۲۰۰ = ارزش مورد انتظار اطلاعات نمونه

چون این مبلغ بیشتر از حق‌الزحمه درخواستی شرکت اندیشه است، شرکت پیشرو بهتر است از این شرکت بخواهد بازار را برایش بررسی کند. اگر نتیجه بررسی مثبت شد، که احتمال آن ۰/۴۵ است، شرکت باید کارخانه بزرگی احداث کند که EMV آن ۱۱۶۴۰۰ خواهد بود. اگر نتیجه بررسی منفی شد، که احتمال آن ۰/۵۵ است، بهترین گزینه احداث کارخانه کوچک است که EMV آن ۱۲۴۰۰ ریال خواهد بود.

۱۸ـ۸ مباحث دیگر

مباحث دیگری در تصمیم‌گیری وجود دارد که امکان ارائهٔ آنها در اینجا نیست، ولی به بعضی از آنها اشاره می‌شود.

تصمیم‌گیری در شرایط تعارض. شرایط تعارض[1] نوعی تصمیم‌گیری در حالت عدم اطمینان است که در طرف مقابل یک مدیر یا سازمان، مدیر یا سازمان دیگری وجود دارد. به بیان دیگر تعارض نشان‌دهندهٔ حالت رقابت و تضاد منافع است. در کتابهای کمّی تصمیم‌گیری، معمولاً فصلی به نام **نظریهٔ بازی**[2] وجود دارد که به موضوع فوق می‌پردازد.

1. conflict
2. game theory

نظریهٔ مطلوبیت. گفته شد که در شرایط ریسک، مهمترین معیار تصمیم‌گیری EMV است. ضعف معیار EMV آن است که ریسک‌پذیری افراد را در تصمیم‌گیری دخالت نمی‌دهد. در نظریهٔ مطلوبیت[1]، به جای استفاده از مقادیر پولی، ابتدا تصمیم‌گیرنده مطلوبیت هریک از مقادیر پولی را مشخص می‌کند و سپس تصمیمی را اتخاذ می‌کند که مطلوبیت مورد انتظارش حداکثر شود.

تصمیم‌گیری چند عاملی. تمام مدلهایی که در این فصل مطرح شد با توجه به یک عامل (مثلاً سود، هزینه، زمان و غیره) گزینه‌ای را به عنوان بهترین پیدا می‌کردند. مدلهایی وجود دارد که تمهیداتی را فراهم می‌سازند که تصمیم‌گیرنده بتواند چندین عامل را در تصمیم‌گیری دخالت دهد. از جمله این مدلها می‌توان به فرایند تصمیم‌گیری چند عاملی (MFEP)[2] و فرایند سلسله مراتب تحلیلی (AHP)[3] اشاره کرد.

۹ـ۱۸ خلاصه

یکی از کارهای اصلی مدیران، تصمیم‌گیری است. استفاده از نظریهٔ تصمیم در بلندمدت نتایج موفقیت‌آمیزی به دنبال دارد. در این فصل، شش گام در نظریه تصمیم مطرح شد و مشخص گردید که بسته به دانش تصمیم‌گیرندگان در مسأله، سه نوع تصمیم‌گیری وجود دارد که عبارتند از: تصمیم‌گیری در شرایط اطمینان کامل، عدم اطمینان و ریسک.

معیارهای مختلفی برای تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان (حداکثر حداکثر، حداکثر حداقل، احتمالات مساوی، واقعگرایی و حداقل حداکثر غبن) مطرح شد. در شرایط ریسک معمولاً از معیار ارزش پولی مورد انتظار (EMV) استفاده می‌شود. اگر تصمیم‌گیری پیچیده و مستلزم چندین مرحله باشد درخت تصمیم می‌تواند ابزار مناسبی در این خصوص باشد. در اغلب موارد تصمیم‌گیرندگان برای تصمیمات اساسی خود ترجیح می‌هند اطلاعات بیشتری را تدارک ببینند. با این اطلاعات جدید می‌توان در احتمالات پیشین، به کمک قضیهٔ بیز، تجدیدنظر کرد.

1. utility theory
2. multi-factor evaluation process
3. analytic hierarchy process

۱۰-۱۸ سؤالات و مسائل

سؤالات دو گزینه‌ای

۱. تصمیمات خوب همیشه نتایج مطلوبی به دنبال دارد. ص ☐ غ ☐

۲. حالات طبیعت، متغیرهای قابل کنترل در تصمیم هستند. ص ☐ غ ☐

۳. معیار حداکثر حداقل، یکی از معیارهای تصمیم‌گیری در شرایط اطمینان کامل است. ص ☐ غ ☐

٤. مهمترین معیار تصمیم‌گیری در شرایط ریسک، EMV است. ص ☐ غ ☐

۵. نماد ☐ در درخت تصمیم نشان‌دهندهٔ نقطه تصمیم است. ص ☐ غ ☐

٦. ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل و ارزش مورد انتظار با اطلاعات کامل به صورت مترادف به کار می‌روند. ص ☐ غ ☐

۷. هر مسأله تصمیمی را که بتوان با EMV حل کرد، آن را می‌توان با درخت تصمیم نیز نشان داد. ص ☐ غ ☐

۸. نام دیگر معیار احتمالات مساوی، معیار لاپلاس است. ص ☐ غ ☐

۹. معیار حداکثر حداکثر به معیار بدبینانه فیز معروف است. ص ☐ غ ☐

۱۰. در معیار واقعگرایی، اگر $\alpha = ۰/۲$ باشد، فرد نسبتاً بدبین است. ص ☐ غ ☐

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. جدول بازده زیر را در نظر بگیرید (احتمال هریک از حالات طبیعت نامشخص است).

گزینه‌ها	حالات طبیعت s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	۲۰۰-	۱۵۰	۲۰۰	۳۰۰
a_2	۸۰-	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
a_3	۰	۳۰	۵۵	۱۲۰

بهترین گزینه با معیار حداکثر حداکثر چیست؟

الف) a_1 ب) a_2 ج) a_3 د) a_1 و a_2

۱۲. با توجه به سؤال ۱۱، بهترین گزینه با معیار احتمالات مساوی (لاپلاس) چیست؟

الف) a_1 ب) a_2 ج) a_3 د) a_2 و a_3

۱۳. با توجه به سؤال ۱۱، بهترین گزینه با معیار واقعگرایی (با $\alpha = ۰/٤$) کدام است؟

الف) a_1 ب) a_2 ج) a_3 د) a_1 و a_3

۱۴. با توجه به سؤال ۱۱، بهترین گزینه با معیار حداکثر حداقل چیست؟

الف) a_1 ب) a_2 ج) a_3 د) a_1 و a_3

۱۵. با توجه به سؤال ۱۱، اگر تصمیم‌گیرنده گزینه a_2 را انتخاب کرده باشد و حالت s_4 واقع شود، چقدر وی مغبون شده است؟

الف) ۸۰ ب) ۱۸۰ ج) ۱۰۰ د) ۵۰

۱۶. با توجه به سؤال ۱۱، بهترین گزینه با معیار حداقل حداکثر غبن کدام است؟

الف) a_1 ب) a_2 ج) a_3 د) a_2 و a_3

۱۷. جدول بازده زیر را در نظر بگیرید.

گزینه‌ها	حالات طبیعت		
	s_1 ($p_1 = ۰/۲$)	s_2 ($p_2 = ۰/۳$)	s_3 ($p_3 = ۰/۵$)
a_1	۳۵۰	۹۰۰	۱۸۸۰
a_2	-۲۰۰	۱۲۰۰	۱۶۰۰
a_3	-۵۰۰	۷۰۰	۲۵۰۰

با معیار EMV بهترین گزینه چیست؟

الف) a_1 ب) a_2 ج) a_3 د) اطلاعات کافی نیست

۱۸. با توجه به سؤال ۱۷، فرض کنید تصمیم‌گیرنده دربارهٔ بازده ۲۵۰۰ نامطمئن است. نوسانات مجاز این مقدار، مشروط بر اینکه جواب بهینه قبلی، بهینه باقی بماند کدام است؟

الف) M ≥ ۱۰۲۰ ب) M ≥ ۲۰۲۰ ج) M ≥ ۱۲۸۰ د) M ≥ ۲۳۴۰

۱۹. با توجه به سؤال ۱۷، فرض کنید تصمیم‌گیرنده دربارهٔ احتمال حالت طبیعت s_1 (۰/۲) اطمینان دارد، ولی در مورد $p_3 =$ ۰/۵ نامطمئن است. در کدام یک از شرایط زیر، جواب بهینه قبلی، بهینه باقی می‌ماند؟

الف) $p_3 \ge$ ۰/۳۲۸ ب) $p_2 \ge$ ۰/۴۰۲ ج) ۰/۳۲۸ ≤ p_3 ≤ ۰/۴۰۲ د) $p_3 \le$ ۰/۳۲۸

۲۰. با توجه به سؤال ۱۷، اگر این مسأله با درخت تصمیم حل شود تعداد نقاط تصمیم (□) و تعداد گره‌های حالات طبیعت (○)، به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟

الف) ۳ و ۳ ب) ۳ و ۱ ج) ۱ و ۳ د) ۱ و ۱

۲۱. با توجه به سؤال ۱۷، ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل کدام یک از موارد زیر است؟

الف) ۳۲۰ ب) ۳۰۲ ج) ۲۰۳ د) ۲۳۰

۲۲. با توجه به سؤال ۱۷، بازده ۱۲۰۰ (مربوط به گزینه a_2 و حالت s_2) به چه مقدار تبدیل شود تا a_2 و a_3 هردو بهینه شود؟

الف) ۱۵۰۰ ب) ۲۰۰۰ ج) ۲۵۰۰ د) ۳۰۰۰

مسائل

۲۳. مدیر یک شرکت خدماتی مجبور است از بین سه برنامهٔ تبلیغاتی موجود a_1، a_2 و a_3 یکی را انتخاب کند. حالتهای مختلف بازار می‌تواند ترقی، تنزل و عدم تغییر قیمت در آن باشد. جدول بازده برای این شرکت به صورت زیر است (ارقام به میلیون ریال).

برنامه‌های تبلیغاتی	حالات بازار		
	ترقی قیمت	تنزل قیمت	عدم تغییر قیمت
a_1	۳	۶	۱-
a_2	۳	۵	۴
a_3	۴-	۷	۱۲

بهترین گزینه در هریک از موارد زیر را مشخص کنید:

الف) با معیار حداکثر حداکثر،

ب) با معیار حداقل حداکثر غبن،

ج) با معیار احتمالات مساوی (لاپلاس)،

د) با معیار واقعگرایی (با $\alpha = ۰/۵۵$)،

هـ) با معیار حداکثر حداقل

۲۴. فردی در یک مغازه فرش فروشی کار می‌کند. در حال حاضر حقوق ماهانه وی ۶۰۰ هزار ریال است. صاحب مغازه به وی گفته است که می‌تواند از دو پیشنهاد حقوقی یکی را انتخاب کند: ۱) حقوق ثابت قبلی، ۲) حقوق ثابت ۳۰۰ هزار ریال به اضافه ۵۰ هزار ریال به ازای هر تخته فرشی که به فروش رود.

آمار فروش نشان می‌دهد که حداقل و حداکثر فروش هر ماه به ترتیب ۳ و ۸ تخته فرش با احتمالات زیر بوده است.

تعداد فروش	۳	۴	۵	۶	۷	۸
احتمال	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۴۵	۰/۲۰	۰/۱۵

الف) جدول تصمیم را تشکیل دهید.

ب) با معیار ارزش پولی مورد انتظار بهترین معیار چیست؟

۲۵. به مسأله ۲۳ مراجعه کرده، ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل را حساب کنید (احتمال ترقی، تنزل و عدم تغییر قیمت را به ترتیب ۰/۳، ۰/۶ و ۰/۱ در نظر بگیرید).

۲۶. به مسأله ۲۴ مراجعه کرده، حقوق ثابت ۳۰۰ هزار ریال به اضافهٔ حداقل چه مبلغی به ازای هر تخته فرش به فروش رفته باعث می‌شود که پیشنهاد اول یا دوم برای این فرد یکسان باشد؟

۲۷. پیمانکاری تصمیم گرفته است در مناقصه یک پروژه ساختمانی شرکت کند. قیمتهای پیشنهادی باید مضربی از ۲۰ میلیون ریال باشد. شانس برنده شدن قیمت پیشنهادی ۲۴۰ میلیون ریالی ۰/۲، قیمت ۲۲۰ میلیون ریالی ۰/۳، و قیمت ۲۰۰ میلیون ریالی ۰/۵ است. تصور می‌شود هر قیمتی زیر ۲۰۰ میلیون ریال پیشنهاد شود حتماً برنده می‌شود و هر قیمتی بیش از ۲۴۰ میلیون ریال برنده نمی‌شود. اگر پیمانکار مناقصه را ببرد، باید مشکل طراحی کار را حل کند که در این هنگام دو انتخاب در پیش دارد. یکی از انتخابها این است که برای طراحی از مشاوران بیرون از شرکت استفاده کند، که مستلزم ۸۰ میلیون ریال است و کارشان تضمین شده است. انتخاب دیگر آن است که با سرمایه گذاری ۳۰ میلیون ریالی روی نیروهای داخلی، سعی در حل مشکل طراحی کند، که در این صورت اگر سعی و کوشش به شکست انجامید، در این صورت از مشاوران بیرونی استفاده کند. پیش‌بینی می‌شود که احتمال حل مشکل طراحی توسط نیروهای داخلی ۰/۶ باشد. پس از حل مشکل طراحی، هزینه‌های دیگر جهت انجام کار ۱۴۰ میلیون ریال است.

الف) پیمانکار به صورت بالقوه دارای دو تصمیم است. آن دو چه هستند؟

ب) درخت تصمیم را رسم کنید.

ج) بر مبنای معیار ارزش پولی مورد انتظار، بهترین استراتژی چیست؟

۲۸. تولیدکنندگان همواره در جستجوی نحوهٔ بسته‌بندی جدید هستند به نحوی که کالا براحتی حمل شود، براحتی انبار شود، مناسب با قفسه خرده‌فروشان بوده، مورد علاقه مشتریان باشد. مدیر بازاریابی یک شرکت مواد غذایی درصدد طرح جدیدی برای تولیدات شرکت است. قبل از تصمیم در مورد پذیرش یک طرح جدید، وی باید تصمیم بگیرد که از یک گروه تحقیق، با

صرف هزینه ۵ میلیون ریال، بخواهد که واکنش خریداران را به طرح جدید جویا شوند یا خیر. وی مشخص کرده است که اگر طراحی جدید معرفی شود و فروش «خوب» باشد، ماهانه ٤۰ میلیون ریال، اگر «متوسط» باشد ۲۰ میلیون ریال و اگر «بد» باشد ٦ میلیون ریال بازدهی برای شرکت دارد. تجربیات گذشته مدیر بازاریابی در مورد این گروه تحقیق منتهی به تهیه جدول زیر شده است.

نتیجهٔ تحقیق	حالات طبیعت (فروش واقعی)		
	خوب	متوسط	بد
مساعد	۰/۷۵	۰/٤۰	۰/۱۰
نامساعد	۰/۲۵	۰/٦۰	۰/۹۰

اگر تصمیم گرفته شود که از طراحی جدید استفاده نشود، از طراحی قبلی استفاده می‌شود که ماهانه ۱٦ میلیون ریال بازدهی دارد. تصور می‌شود که احتمالات فروش خوب، متوسط و بد ـ ناشی از طراحی جدید ـ به ترتیب ۰/٤۲۵، ۰/۲۵۰ و ۰/۳۲۵ باشد.

الف) جدول بازدهی برای مسألهٔ تصمیم تشکیل دهید.

ب) اگر مدیر بازاریابی به دنبال حداکثر کردن سود مورد انتظار شرکتش باشد، آیا باید به مدیر عامل شرکت توصیه کند که طراحی جدید را بپذیرد؟

ج) اگر گروه تحقیق برای بررسی نظر مشتریان به کار گرفته شوند، در صورتی که پس از تحقیق نتیجه مساعدی را پیش‌بینی کردند، آیا باید طرح جدید استفاده شود؟ اگر نتیجه نامساعدی را پیش‌بینی کردند چه؟

د) ارزش مورد انتظار اطلاعات نمونه‌ای که توسط این گروه تحقیق فراهم می‌شود چقدر است؟ آیا مدیر بازاریابی استفاده از خدمات آنها را در قبال ۲/۵ میلیون ریال به مدیر عامل باید توصیه کند؟

پاسخنامهٔ سؤالات

۱) غ	۲) غ	۳) غ	٤) ص
۵) ص	٦) غ	۷) ص	۸) ص
۹) غ	۱۰) ص	۱۱) الف	۱۲) الف
۱۳) ج	۱٤) ج	۱۵) ج	۱٦) ب
۱۷) ج	۱۸) د	۱۹) ب	۲۰) ج
۲۱) الف	۲۲) ب		

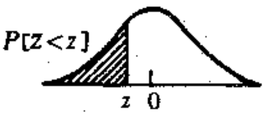
پیوست

جدول ۱ اعداد تصادفی

	ستون									
سطر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10480	15011	01536	02011	81647	91646	69179	14194	62590	36207
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198	27982	53402	93965	34095
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809	15179	24830	49340	32081
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376	39440	53537	71341	57004
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782	60468	81305	49684	60672
6	77921	06907	11008	42751	27756	53498	18602	70659	90655	15053
7	99562	72905	56420	69994	98872	31016	71194	18738	44013	48840
8	96301	91977	05463	07972	18876	20922	94595	56869	69014	60045
9	89579	14342	63661	10281	17453	18103	57740	84378	25331	12566
10	85475	36857	53342	53988	53060	59533	38867	62300	08158	17983
11	28918	69578	88231	33276	70997	79936	56865	05859	90106	31595
12	63553	40961	48235	03427	49626	69445	18663	72695	52180	20847
13	09429	93969	52636	92737	88974	33488	36320	17617	30015	08272
14	10365	61129	87529	85689	48237	52267	67689	93394	01511	26358
15	07119	97336	71048	08178	77233	13916	47564	81056	97735	85977
16	51085	12765	51821	51259	77452	16308	60756	92144	49442	53900
17	02368	21382	52404	60268	89368	19885	55322	44819	01188	65255
18	01011	54092	33362	94904	31273	04146	18594	29852	71585	85030
19	52162	53916	46369	58586	23216	14513	83149	98736	23495	64350
20	07056	97628	33787	09998	42698	06691	76988	13602	51851	46104
21	48663	91245	85828	14346	09172	30168	90229	04734	59193	22178
22	54164	58492	22421	74103	47070	25306	76468	26384	58151	06646
23	32639	32363	05597	24200	13363	38005	94342	28728	35806	06912
24	29334	27001	87637	87308	58731	00256	45834	15398	46557	41135
25	02488	33062	28834	07351	19731	92420	60952	61280	50001	67658
26	81525	72295	04839	96423	24878	82651	66566	14778	76797	14780
27	29676	20591	68086	26432	46901	20849	89768	81536	86645	12659
28	00742	57392	39064	66432	84673	40027	32832	61362	98947	96067
29	05366	04213	25669	26422	44407	44048	37937	63904	45766	66134
30	91921	26418	64117	94305	26766	25940	39972	22209	71500	64568
31	00582	04711	87917	77341	42206	35126	74087	99547	81817	42607
32	00725	69884	62797	56170	86324	88072	76222	36086	84637	93161
33	69011	65795	95876	55293	18988	27354	26575	08625	40801	59920
34	25976	57948	29888	88604	67917	48708	18912	82271	65424	69774
35	09763	83473	73577	12908	30883	18317	28290	35797	05998	41688
36	91567	42595	27958	30134	04024	86385	29880	99730	55536	84855
37	17955	56349	90999	49127	20044	59931	06115	20542	18059	02008
38	46503	18584	18845	49618	02304	51038	20655	58727	28168	15475
39	92157	89634	94824	78171	84610	82834	09922	25417	44137	48413
40	14577	62765	35605	81263	39667	47358	56873	56307	61607	49518
41	98427	07523	33362	64270	01638	92477	66969	98420	04880	45585
42	34914	63976	88720	82765	34476	17032	87589	40836	32427	70002
43	70060	28277	39475	46473	23219	53416	94970	25832	69975	94884
44	53976	54914	06990	67245	68350	82948	11398	42878	80287	88267
45	76072	29515	40980	07391	58745	25774	22987	80059	39911	96189
46	90725	52210	83974	29992	65831	38857	50490	83765	55657	14361
47	64364	67412	33339	31926	14883	24413	59744	92351	97473	89286
48	08962	00358	31662	25388	61642	34072	81249	35648	56891	69352
49	95012	68379	93526	70765	10592	04542	76463	54328	02349	17247
50	15664	10493	20492	38391	91132	21999	59516	81652	27195	48223

سطر	ستون 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
51	16408	81899	04153	53381	79401	21438	83035	92350	36693	31238
52	18629	81953	05520	91962	04739	13092	97662	24822	94730	06496
53	73115	35101	47498	87637	99016	71060	88824	71013	18735	20286
54	57491	16703	23167	49323	45021	33132	12544	41035	80780	45393
55	30405	83946	23792	14422	15059	45799	22716	19792	09983	74353
56	16631	35006	85900	98275	32388	52390	16815	69298	82732	38480
57	96773	20206	42559	78985	05300	22164	24369	54224	35083	19687
58	38935	64202	14349	82674	66523	44133	00697	35552	35970	19124
59	31624	76384	17403	53363	44167	64486	64758	75366	76554	31601
60	78919	19474	23632	27889	47914	02584	37680	20801	72152	39339
61	03931	33309	57047	74211	63445	17361	62825	39908	05607	91284
62	74426	33278	43972	10119	89917	15665	52872	73823	73144	88662
63	09066	00903	20795	95452	92648	45454	09552	88815	16553	51125
64	42238	12426	87025	14267	20979	04508	64535	31355	86064	29472
65	16153	08002	26504	41744	81959	65642	74240	56302	00033	67107
66	21457	40742	29820	96783	29400	21840	15035	34537	33310	06116
67	21581	57802	02050	89728	17937	37621	47075	42080	97403	48626
68	55612	78095	83197	33732	05810	24813	86902	60397	16489	03264
69	44657	66999	99324	51281	84463	60563	79312	93454	68876	25471
70	91340	84979	46949	81973	37949	61023	43997	15263	80644	43942
71	91227	21199	31935	27022	84067	05462	35216	14486	29891	68607
72	50001	38140	66321	19924	72163	09538	12151	06878	91903	18749
73	65390	05224	72958	28609	81406	39147	25549	48542	42627	45233
74	27504	96131	83944	41575	10573	08619	64482	73923	36152	05184
75	37169	94851	39117	89632	00959	16487	65536	49071	39782	17095
76	11508	70225	51111	38351	19444	66499	71945	05422	13442	78675
77	37449	30362	06694	54690	04052	53115	62757	95348	78662	11163
78	46515	70331	85922	38329	57015	15765	97161	17869	45349	61796
79	30986	81223	42416	58353	21532	30502	32305	86482	05174	07901
80	63798	64995	46583	09785	44160	78128	83991	42865	92520	83531
81	82486	84846	99254	67632	43218	50076	21361	64816	51202	88124
82	21885	32906	93431	09060	64297	51674	64126	62570	26123	05155
83	60336	98782	07408	53458	13564	59089	26445	29789	85205	41001
84	43937	46891	24010	25560	86355	33941	25786	54990	71899	15475
85	97656	63175	89303	16275	07100	92063	21942	18611	47348	20203
86	03299	01221	05418	38982	55758	92237	26759	86367	21216	98442
87	79626	06486	03574	17668	07785	76020	79924	25651	83325	88428
88	85636	68335	47539	03129	65651	11977	02510	26113	99447	68645
89	18039	14367	61337	06177	12143	46609	32989	74014	64708	00533
90	08362	15656	60627	36478	65648	16764	53412	09013	07832	41574
91	79556	29068	04142	16268	15387	12856	66227	38358	22478	73373
92	92608	82674	27072	32534	17075	27698	98204	63863	11951	34648
93	23982	25835	40055	67006	12293	02753	14827	23235	35071	99704
94	09915	96306	05908	97901	28395	14186	00821	80703	70426	75647
95	59037	33300	26695	62247	69927	76123	50842	43834	86654	70959
96	42488	78077	69882	61657	34136	79180	97526	43092	04098	73571
97	46764	86273	63003	93017	31204	36692	40202	35275	57306	55543
98	03237	45430	55417	63282	90816	17349	88298	90183	36600	78406
99	86591	81482	52667	61582	14972	90053	89534	76036	49199	43716
100	38534	01715	94964	87288	65680	43772	39560	12918	86537	62738

Abridged from *Handbook of Tables for Probability and Statistics*, 2nd ed. Edited by William H. Beyer (Cleveland: The Chemical Rubber Company, 1968). Reproduced by permission of CRC Press, Inc.



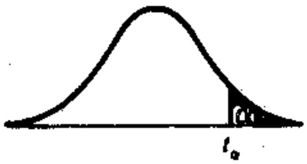
جدول ۲ احتمالهای نرمال استاندارد

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

ادامه جدول ۲

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998

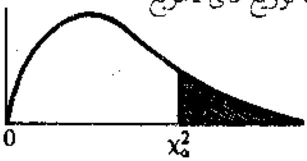
جدول ۳ سطح زیر منحنی دنبالهٔ راست توزیع t



d.f.	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$	d.f.
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

From "Table of Percentage Points of the *t*-Distribution," computed by Maxine Merrington. *Biometrika*, Vol. 32 (1941), p. 300. Reproduced by permission of the Biometrika Trustees.

جدول ٤ سطح زیر منحنی دنباله راست توزیع کای ـ مربع



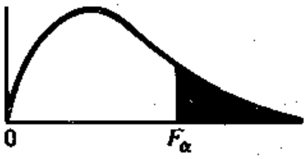
d.f.	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.990}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.950}$	$\chi^2_{0.900}$
1	0.0000393	0.0001571	0.0009821	0.0039321	0.0157908
2	0.0100251	0.0201007	0.0506356	0.102587	0.210720
3	0.0717212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581

$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.050}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.010}$	$\chi^2_{0.005}$	d.f.
2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	1
4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	2
6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381	3
7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602	4
9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	5
10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	6
12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	7
13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550	8
14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	9
15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882	10
17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569	11
18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	12
19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194	13
21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193	14
22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	15
23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	16
24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	17
25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	18
27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822	19
28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	20
29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010	21
30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956	22
32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813	23
33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585	24
34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278	25
35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899	26
36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449	27
37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933	28
39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356	29
40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720	30
51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659	40
63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	50
74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517	60
85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215	70
96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321	80
107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	90
118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	100

From "Tables of the Percentage Points of the χ^2-Distribution." *Biometrika*, Vol. 33, (1941). Reproduced by permission of the Biometrika Trustees.

جدول ۵ سطح زیر منحنی دنبالهٔ راست توزیع F

ν_1: 10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	α	ν_2
60.19	60.71	60.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33	.100	1
241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.2	252.2	253.3	254.3	.050	
968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018	.025	
6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366	.010	
24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25465	.005	
9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49	.100	2
19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50	.050	
39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50	.025	
99.40	99.42	99.47	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50	.010	
199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	.005	
5.23	[illegible]	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13	.100	3
8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53	.050	
14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90	.025	
27.23	27.05	26.87	[illegible]	[illegible]	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13	.010	
43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83	.005	
3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76	.100	4
5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63	.050	
8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26	.025	
14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46	.010	
20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32	.005	
3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10	.100	5
4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36	.050	
6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02	.025	
10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	[illegible]	9.29	9.20	9.11	9.02	.010	
13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14	.005	
2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72	.100	6
4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67	.050	
5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85	.025	
7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88	.010	
10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88	.005	
2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47	.100	7
3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23	.050	
4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14	.025	
6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65	.010	
8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08	.005	
2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29	.100	8
3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93	.050	
4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67	.025	
5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86	.010	
7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95	.005	
2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16	.100	9
3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71	.050	
3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33	.025	
5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31	.010	
6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19	.005	
2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06	.100	10
2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54	.050	
3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08	.025	
4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91	.010	
5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64	.005	
2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97	.100	11
2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40	.050	
3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88	.025	
4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60	.010	
5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23	.005	
2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90	.100	12
2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30	.050	
3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72	.025	
4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36	.010	
5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90	.005	



		ν_1								
ν_2	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
	.050	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
	.025	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3
	.010	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
	.005	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39
	.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
	.005	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
	.005	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
	.005	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
	.005	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.005	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.005	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.005	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.005	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.005	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97
11	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
	.005	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54
12	.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.005	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20

					ν_1						
10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	α	ν_2
2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85	.100	13
2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21	.050	
3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60	.025	
4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17	.010	
4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65	.005	
2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80	.100	14
2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13	.050	
3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49	.025	
3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00	.010	
4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44	.005	
2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76	.100	15
2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07	.050	
3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40	.025	
3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87	.010	
4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26	.005	
2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	.100	16
2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01	.050	
2.99	2.89	[illegible]	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32	.025	
3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75	.010	
4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11	.005	
2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	.100	17
2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96	.050	
2.92	2.82	2.72	2.62	[illegible]	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25	.025	
3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65	.010	
4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98	.005	
1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	.100	18
2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92	.050	
2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19	.025	
3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57	.010	
4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87	.005	
1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63	.100	19
2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88	.050	
2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13	.025	
3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49	.010	
3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78	.005	
1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61	.100	20
2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84	.050	
2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09	.025	
3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42	.010	
3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69	.005	
1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	.100	21
2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81	.050	
2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04	.025	
3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36	.010	
3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61	.005	
1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	.100	22
2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78	.050	
2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00	.025	
3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31	.010	
3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55	.005	
1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55	.100	23
2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	.050	
2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97	.025	
3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26	.010	
3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48	.005	
1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53	.100	24
2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73	.050	
2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94	.025	
3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21	.010	
3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43	.005	
1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	.100	25
2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71	.050	
2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91	.025	
3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17	.010	
3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38	.005	
1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50	.100	26
2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69	.050	
2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88	.025	
3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13	.010	
3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33	.005	

ν_2	α	ν_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
	.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
	.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31
	.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
	.005	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94
14	.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
	.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
	.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21
	.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
	.005	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72
15	.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	.050	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	.025	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
	.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	.005	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54
16	.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
	.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
	.025	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05
	.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
	.005	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38
17	.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
	.050	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
	.025	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98
	.010	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
	.005	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25
18	.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
	.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
	.025	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93
	.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
	.005	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14
19	.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
	.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
	.025	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88
	.010	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
	.005	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04
20	.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
	.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	.005	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96
21	.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
	.050	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
	.025	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80
	.010	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
	.005	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88
22	.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
	.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
	.025	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76
	.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
	.005	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81
23	.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
	.050	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
	.025	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73
	.010	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
	.005	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75
24	.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
	.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	.025	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
	.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	.005	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69
25	.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
	.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
	.025	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68
	.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
	.005	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64
26	.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
	.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
	.025	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65
	.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
	.005	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60

					ν_1						
10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	α	ν_2
1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49	.100	27
2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67	.050	
2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85	.025	
3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10	.010	
3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29	.005	
1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48	.100	28
2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65	.050	
2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83	.025	
3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06	.010	
3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25	.005	
1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47	.100	29
2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64	.050	
2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81	.025	
3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03	.010	
3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21	.005	
1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46	.100	30
2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62	.050	
2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79	.025	
2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01	.010	
3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18	.005	
1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38	.100	40
2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51	.050	
2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64	.025	
2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80	.010	
3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93	.005	
1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29	.100	60
1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39	.050	
2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48	.025	
2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60	.010	
2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69	.005	
1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19	.100	120
1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25	.050	
2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31	.025	
2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38	.010	
2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43	.005	
1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00	.100	∞
1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00	.050	
2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00	.025	
2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00	.010	
2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00	.005	

Source: A portion of "Tables of percentage points of the inverted beta (F) distribution," *Biometrika*, Vol. 33 (1943) by M. Merrington and C. M. Thompson and from Table 18 of *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, Third Edition (1966), Cambridge University Press, edited by E. S. Pearson and H. O. Hartley. Reproduced with permission of the authors, editors, and Biometrika Trustees.

		ν_1								
ν_2	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
	.050	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
	.025	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63
	.010	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
	.005	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56
28	.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
	.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
	.025	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61
	.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
	.005	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52
29	.100	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
	.050	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
	.025	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59
	.010	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
	.005	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48
30	.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
	.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
	.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	.005	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45
40	.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
	.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
	.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45
	.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
	.005	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22
60	.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
	.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	.005	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01
120	.100	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
	.050	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
	.025	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
	.010	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
	.005	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81
∞	.100	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63
	.050	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.63
	.025	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11
	.010	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41
	.005	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62

جدول ۶ ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن ـ مقادیر بحرانی

n	$\alpha = .05$	$\alpha = .025$	$\alpha = .01$	$\alpha = .005$
5	0.900	—	—	—
6	0.829	0.886	0.943	—
7	0.714	0.786	0.893	—
8	0.643	0.738	0.833	0.881
9	0.600	0.683	0.783	0.833
10	0.564	0.648	0.745	0.794
11	0.523	0.623	0.736	0.818
12	0.497	0.591	0.703	0.780
13	0.475	0.566	0.673	0.745
14	0.457	0.545	0.646	0.716
15	0.441	0.525	0.623	0.689
16	0.425	0.507	0.601	0.666
17	0.412	0.490	0.582	0.645
18	0.399	0.476	0.564	0.625
19	0.388	0.462	0.549	0.608
20	0.377	0.450	0.534	0.591
21	0.368	0.438	0.521	0.576
22	0.359	0.428	0.508	0.562
23	0.351	0.418	0.496	0.549
24	0.343	0.409	0.485	0.537
25	0.336	0.400	0.475	0.526
26	0.329	0.392	0.465	0.515
27	0.323	0.385	0.456	0.505
28	0.317	0.377	0.448	0.496
29	0.311	0.370	0.440	0.487
30	0.305	0.364	0.432	0.478

From "Distribution of Sums of Squares of Rank Differences for Small Samples," E. G. Olds, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 9 (1938). Reproduced with the kind permission of the editor, *Annals of Mathematical Statistics*.

جدول ۷ احتمالهای تجمعی دو جمله‌ای $P[X \le c] = \sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

	c	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
n=1	0	.950	.900	.800	.700	.600	.500	.400	.300	.200	.100	.050
	1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=2	0	.902	.810	.640	.490	.360	.250	.160	.090	.040	.010	.002
	1	.997	.990	.960	.910	.840	.750	.640	.510	.360	.190	.097
	2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=3	0	.857	.729	.512	.343	.216	.125	.064	.027	.008	.001	.000
	1	.993	.972	.896	.784	.648	.500	.352	.216	.104	.028	.007
	2	1.000	.999	.992	.973	.936	.875	.784	.657	.488	.271	.143
	3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=4	0	.815	.656	.410	.240	.130	.063	.026	.008	.002	.000	.000
	1	.986	.948	.819	.652	.475	.313	.179	.084	.027	.004	.000
	2	1.000	.996	.973	.916	.821	.688	.525	.348	.181	.052	.014
	3	1.000	1.000	.998	.992	.974	.938	.870	.760	.590	.344	.185
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=5	0	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000
	1	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000
	2	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001
	3	1.000	1.000	.993	.969	.913	.813	.663	.472	.263	.081	.023
	4	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=6	0	.735	.531	.262	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000	.000
	1	.967	.886	.655	.420	.233	.109	.041	.011	.002	.000	.000
	2	.998	.984	.901	.744	.544	.344	.179	.070	.017	.001	.000
	3	1.000	.999	.983	.930	.821	.656	.456	.256	.099	.016	.002
	4	1.000	1.000	.998	.989	.959	.891	.767	.580	.345	.114	.033
	5	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.984	.953	.882	.738	.469	.265
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=7	0	.698	.478	.210	.082	.028	.008	.002	.000	.000	.000	.000
	1	.956	.850	.577	.329	.159	.063	.019	.004	.000	.000	.000
	2	.996	.974	.852	.647	.420	.227	.096	.029	.005	.000	.000
	3	1.000	.997	.967	.874	.710	.500	.290	.126	.033	.003	.000
	4	1.000	1.000	.995	.971	.904	.773	.580	.353	.148	.026	.004
	5	1.000	1.000	1.000	.996	.981	.938	.841	.671	.423	.150	.044
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.992	.972	.918	.790	.522	.302
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	c	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95
$n=8$	0	.663	.430	.168	.058	.017	.004	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.943	.813	.503	.255	.106	.035	.009	.001	.000	.000	.000
	2	.994	.962	.797	.552	.315	.145	.050	.011	.001	.000	.000
	3	1.000	.995	.944	.806	.594	.363	.174	.058	.010	.000	.000
	4	1.000	1.000	.990	.942	.826	.637	.406	.194	.056	.005	.000
	5	1.000	1.000	.999	.989	.950	.855	.685	.448	.203	.038	.006
	6	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.965	.894	.745	.497	.187	.057
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.942	.832	.570	.337
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=9$	0	.630	.387	.134	.040	.010	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.929	.775	.436	.196	.071	.020	.004	.000	.000	.000	.000
	2	.992	.947	.738	.463	.232	.090	.025	.004	.000	.000	.000
	3	.999	.992	.914	.730	.483	.254	.099	.025	.003	.000	.000
	4	1.000	.999	.980	.901	.733	.500	.267	.099	.020	.001	.000
	5	1.000	1.000	.997	.975	.901	.746	.517	.270	.086	.008	.001
	6	1.000	1.000	1.000	.996	.975	.910	.768	.537	.262	.053	.008
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.980	.929	.804	.564	.225	.071
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.960	.866	.613	.370
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=10$	0	.599	.349	.107	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.914	.736	.376	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000
	2	.988	.930	.678	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000
	3	.999	.987	.879	.650	.382	.172	.055	.011	.001	.000	.000
	4	1.000	.998	.967	.850	.633	.377	.166	.047	.006	.000	.000
	5	1.000	1.000	.994	.953	.834	.623	.367	.150	.033	.002	.000
	6	1.000	1.000	.999	.989	.945	.828	.618	.350	.121	.013	.001
	7	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.322	.070	.012
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.624	.264	.086
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.893	.651	.401
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=11$	0	.569	.314	.086	.020	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.898	.697	.322	.113	.030	.006	.001	.000	.000	.000	.000
	2	.985	.910	.617	.313	.119	.033	.006	.001	.000	.000	.000
	3	.998	.981	.839	.570	.296	.113	.029	.004	.000	.000	.000
	4	1.000	.997	.950	.790	.533	.274	.099	.022	.002	000	.000
	5	1.000	1.000	.988	.922	.753	.500	.247	.078	.012	.000	.000
	6	1.000	1.000	.998	.978	.901	.726	.467	.210	.050	.003	.000
	7	1.000	1.000	1.000	.996	.971	.887	.704	.430	.161	.019	.002
	8	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.967	.881	.687	.383	.090	.015
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.970	.887	.678	.303	.102
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.980	.914	.686	.431
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	c	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95
$n=12$	0	.540	.282	.069	.014	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.882	.659	.275	.085	.020	.003	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.980	.889	.558	.253	.083	.019	.003	.000	.000	.000	.000
	3	.998	.974	.795	.493	.225	.073	.015	.002	.000	.000	.000
	4	1.000	.996	.927	.724	.438	.194	.057	.009	.001	.000	.000
	5	1.000	.999	.981	.882	.665	.387	.158	.039	.004	.000	.000
	6	1.000	1.000	.996	.961	.842	.613	.335	.118	.019	.001	.000
	7	1.000	1.000	.999	.991	.943	.806	.562	.276	.073	.004	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.998	.985	.927	.775	.507	.205	.026	.002
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.981	.917	.747	.442	.111	.020
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.980	.915	.725	.341	.118
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.986	.931	.718	.460
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=13$	0	.513	.254	.055	.010	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.865	.621	.234	.064	.013	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.975	.866	.502	.202	.058	.011	.001	.000	.000	.000	.000
	3	.997	.966	.747	.421	.169	.046	.008	.001	.000	.000	.000
	4	1.000	.994	.901	.654	.353	.133	.032	.004	.000	.000	.000
	5	1.000	.999	.970	.835	.574	.291	.098	.018	.001	.000	.000
	6	1.000	1.000	.993	.938	.771	.500	.229	.062	.007	.000	.000
	7	1.000	1.000	.999	.982	.902	.709	.426	.165	.030	.001	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.996	.968	.867	.647	.346	.099	.006	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.954	.831	.579	.253	.034	.003
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.942	.798	.498	.134	.025
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.987	.936	.766	.379	.135
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.990	.945	.746	.487
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=14$	0	.488	.229	.044	.007	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.847	.585	.198	.047	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.970	.842	.448	.161	.040	.006	.001	.000	.000	.000	.000
	3	.996	.956	.698	.355	.124	.029	.004	.000	.000	.000	.000
	4	1.000	.991	.870	.584	.279	.090	.018	.002	.000	.000	.000
	5	1.000	.999	.956	.781	.486	.212	.058	.008	.000	.000	.000
	6	1.000	1.000	.988	.907	.692	.395	.150	.031	.002	.000	.000
	7	1.000	1.000	.998	.969	.850	.605	.308	.093	.012	.000	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.992	.942	.788	.514	.219	.044	.001	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.910	.721	.416	.130	.009	.000
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.971	.876	.645	.302	.044	.004
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.960	.839	.552	.158	.030
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.953	.802	.415	.153
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.993	.956	.771	.512
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

		p										
	c	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
n = 15	0	.463	.206	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.829	.549	.167	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.964	.816	.398	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.995	.944	.648	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000
	4	.999	.987	.836	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000
	5	1.000	.998	.939	.722	.403	.151	.034	.004	.000	.000	.000
	6	1.000	1.000	.982	.869	.610	.304	.095	.015	.001	.000	.000
	7	1.000	1.000	.996	.950	.787	.500	.213	.050	.004	.000	.000
	8	1.000	1.000	.999	.985	.905	.696	.390	.131	.018	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.996	.966	.849	.597	.278	.061	.002	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.941	.783	.485	.164	.013	.001
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.909	.703	.352	.056	.005
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.973	.873	.602	.184	.036
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.833	.451	.171
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.794	.537
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 16	0	.440	.185	.028	.003	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.811	.515	.141	.026	.003	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.957	.789	.352	.099	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.993	.932	.598	.246	.065	.011	.001	.000	.000	.000	.000
	4	.999	.983	.798	.450	.167	.038	.005	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.997	.918	.660	.329	.105	.019	.002	.000	.000	.000
	6	1.000	.999	.973	.825	.527	.227	.058	.007	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.993	.926	.716	.402	.142	.026	.001	.000	.000
	8	1.000	1.000	.999	.974	.858	.598	.284	.074	.007	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.993	.942	.773	.473	.175	.027	.001	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.998	.981	.895	.671	.340	.082	.003	.000
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.962	.833	.550	.202	.017	.001
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.935	.754	.402	.068	007
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.901	.648	.211	.043
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.974	.859	.485	.189
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.972	.815	.560
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 17	0	.418	.167	.023	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.792	.482	.118	.019	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.950	.762	.310	.077	.012	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.991	.917	.549	.202	.046	.006	.000	.000	.000	.000	.000
	4	.999	.978	.758	.389	.126	.025	.003	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.995	.894	.597	.264	.072	.011	.001	.000	.000	.000
	6	1.000	.999	.962	.775	.448	.166	.035	.003	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.989	.895	.641	.315	.092	.013	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	.997	.960	.801	500	.199	.040	.003	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.987	.908	.685	.359	.105	.011	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.997	.965	.834	.552	.225	.038	.001	.000

		p										
	c	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	11	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.928	.736	.403	.106	.005	.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.975	.874	.611	.242	.022	.001
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.954	.798	.451	.083	.009
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.988	.923	.690	.238	.050
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.981	.882	.518	.208
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.977	.833	.582
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=18$	0	.397	.150	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.774	.450	.099	.014	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.942	.734	.271	.060	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.989	.902	.501	.165	.033	.004	.000	.000	.000	.000	.000
	4	.998	.972	.716	.333	.094	.015	.001	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.994	.867	.534	.209	.048	.006	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	.999	.949	.722	.374	.119	.020	.001	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.984	.859	.563	.240	.058	.006	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	.996	.940	.737	.407	.135	.021	.001	.000	.000
	9	1.000	1.000	.999	.979	.865	.593	.263	.060	.004	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.760	.437	.141	.016	.000	.000
	11	1.000	1.000	1.000	.999	.980	.881	.626	.278	.051	.001	.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.952	.791	.466	.133	.006	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.985	.906	.667	.284	.028	.002
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.967	.835	.499	.098	.011
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.940	.729	.266	.058
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.986	.901	.550	.226
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.850	.603
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=19$	0	.377	.135	.014	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.755	.420	.083	.010	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.933	.705	.237	.046	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.987	.885	.455	.133	.023	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	4	.998	.965	.673	.282	.070	.010	.001	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.991	.837	.474	.163	.032	.003	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	.998	.932	.666	.308	.084	.012	.001	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.977	.818	.488	.180	.035	.003	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	.993	.916	.667	.324	.088	.011	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	.998	.967	.814	.500	.186	.033	.002	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.989	.912	.676	.333	.084	.007	.000	.000
	11	1.000	1.000	1.000	.997	.965	.820	.512	.182	.023	.000	.000
	12	1.000	1.000	1.000	.999	.988	.916	.692	.334	.068	.002	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.968	.837	.526	.163	.009	.000
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.990	.930	.718	.327	.035	.002
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.977	.867	.545	.115	.013
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.954	.763	.295	.067

ادامه جدول ۷

n	c	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.990	.917	.580	.245
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.986	.865	.623
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=20	0	.358	.122	.012	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.736	.392	.069	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.925	.677	.206	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.984	.867	.411	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	4	.997	.957	.630	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.989	.804	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	.998	.913	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.968	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	.990	.887	.596	.252	.057	.005	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	.997	.952	.755	.412	.128	.017	.001	.000	.000
	10	1.000	1.000	.999	.983	.872	.588	.245	.048	.003	.000	.000
	11	1.000	1.000	1.000	.995	.943	.748	.404	.113	.010	.000	.000
	12	1.000	1.000	1.000	.999	.979	.868	.584	.228	.032	.000	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.750	.392	.087	.002	.000
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.979	.874	.584	.196	.011	.000
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.949	.762	.370	.043	.003
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.984	.893	.589	.133	.016
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.965	.794	.323	.075
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.931	.608	.264
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.988	.878	.642
	20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n=25	0	.277	.072	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.642	.271	.027	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.873	.537	.098	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.966	.764	.234	.033	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	.993	.902	.421	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	5	.999	.967	.617	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	.991	.780	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000
	7	1.000	.998	.891	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	.953	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	.983	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000
	10	1.000	1.000	.994	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000
	11	1.000	1.000	.998	.956	.732	.345	.078	.006	.000	.000	.000
	12	1.000	1.000	1.000	.983	.846	.500	.154	.017	.000	.000	.000
	13	1.000	1.000	1.000	.994	.922	.655	.268	.044	.002	.000	.000
	14	1.000	1.000	1.000	.998	.966	.788	.414	.098	.006	.000	.000
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	.987	.885	.575	.189	.017	.000	.000
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.946	.726	.323	.047	.000	.000
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.978	.846	.488	.109	.002	.000

	p										
	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
c											
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.993	.926	.659	.220	.009	.000
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.971	.807	.383	.033	.001
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.910	.579	.098	.007
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.967	.766	.236	.034
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.902	.463	.127
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.973	.729	.358
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.928	.723
25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

جدول ۸ مقادیر بحرانی گولموگوروف ـ اسمیرنوف

درجات آزادی (N)	$D_{0.10}$	$D_{0.05}$	$D_{0.01}$
1	0.950	0.975	0.995
2	0.776	0.842	0.929
3	0.642	0.708	0.828
4	0.564	0.624	0.733
5	0.510	0.565	0.669
6	0.470	0.521	0.618
7	0.438	0.486	0.577
8	0.411	0.457	0.543
9	0.388	0.432	0.514
10	0.368	0.410	0.490
11	0.352	0.391	0.468
12	0.338	0.375	0.450
13	0.325	0.361	0.433
14	0.314	0.349	0.418
15	0.304	0.338	0.404
16	0.295	0.328	0.392
17	0.286	0.318	0.381
18	0.278	0.309	0.371
19	0.272	0.301	0.363
20	0.264	0.294	0.356
25	0.24	0.27	0.32
30	0.22	0.24	0.29
35	0.21	0.23	0.27
OVER 35	$\frac{1.22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{N}}$

Source: F.J. Massey, "The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit," *The Journal of the American Statistical Association,* Vol. 46, © 1951, p. 70. Adapted with permission of the American Statistical Association.

منابع و مآخذ

آذر، عادل؛ «تبیین آماری فرضیات در پژوهشهای مدیریتی - رفتاری»، *فصلنامهٔ علمی پژوهشی دانش مدیریت*؛ دانشگاه تهران، دانشکده علوم اداری و مدیریت بازرگانی، شماره ۲۶، پاییز ۱۳۷۳.

ـــــــ ؛ «طراحی مدل ریاضی بودجه در سازمانهای دولتی - رویکرد آرمانی با استفاده از سریهای زمانی باکس و جنکینز و AHP»؛ *فصلنامهٔ علمی - پژوهشی مدرس*؛ دانشگاه تربیت مدرس، بهار ۱۳۷۶.

باتاچاریا، گوری کی وریچارد ای. جانسون؛ *مفاهیم و روشهای آماری*؛ ترجمهٔ مرتضی ابن‌شهرآشوب و فتاح میکائیلی، ج ۲، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹.

بزرگ‌نیا، ابوالقاسم و حسینعلی نیرومند؛ *سریهای زمانی*؛ چاپ اول، دانشگاه پیام نور، ۱۳۷۴.

سیگل، سیدنی؛ *آمار ناپارامتری برای علوم رفتاری*؛ ترجمهٔ یوسف کریمی، ج ۱، تهران: نشر دانشگاه علامه طباطبایی، ۱۳۶۷.

سعادت، اسفندیار؛ *فرایند تصمیم‌گیری در سازمان*؛ انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۲.

محلوجی، هاشم؛ جزوه درسی شبیه‌سازی.

نتر، جان، ویلیام واسرمن و وتیمور؛ *آمار کاربردی*؛ ترجمهٔ علی عمیدی، ج ۱، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۳.

وونا کات، تاس، اچ. و رانلد جی. وونا کات؛ *آمار مقدماتی*؛ ترجمهٔ محمدرضا مشکاتی، ج ۱، چ ۱، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۷.

Alder, Henry L. and E. B. Rossler; *Introduction to Probability and Statistics*; 3rd ed., John Wiley and Sons, 1989.

Bhatacharyya, Gouri K. and R. A. Johnson; *Statistical Concepts and Methods;* John Wiley and Sons, 1987.

Box, G. E. and G. M. Jenkins; *Time Series Analysis; Forecasting and Control;* Sanfrancisco: Holden-Day, 1970.

Cochran, W. G.; *Sampling Techniques;* 3rd ed., New York: John Wiley and Sons, 1977.

Cohen, Louis and M. Holliday; *Statistics for Education and Physical Education*; 3rd ed., New York, 1989.

Conover, W. J.; *Practical Non-Parametric Statistics;* 2nd ed., New York: John Wiley and Sons, 1980.

Croft, D. J., D. Huntsberger and C. Watson; *Statistical Inference for Management and Economics*; 3rd ed., Boston: Massachusetts, Allyn and Bacon Inc., 1986.

Durbin, J.; "The Fitting of Time Series Models", *Revi. Int. Inst, State;* Vol. 28, No. 233, 1960.

Freund, John E.; *Modern Elementary Statistics*; 6th ed., Prentice Hall, 1984.

Freund, John E. and Gary A. Simon; *Statistics*; 5th ed., Prentice Hall, 1991.

Freund, John E. and Ronald E. Walpole; *Mathematical Statistics*; 3rd ed., Prentice-Hall Inc., 1980.

Hays, W. L.; *Statistics for the Social Sciences*; 3rd ed., New York, 1987.

Hines, William W. and D. C. Montgomery; *Probability and Statistics in Engineering and Management Science;* 3rd ed., John Wiley and Sons, 1990.

Hogg, Robert V. and Allen I. Craig; *Introduction to Mathematical Statistics;* 4th ed., New York: John Wiley and Sons, 1987.

Kazmier, Leonard J.; *Business Statistics*; McGraw-Hill, 1976.

Kerlinger, F. N.; *Foundations of Behavioral Research;* 3rd ed., New York, 1985.

Lancaster, H. O.; *The Chi-Square Distribution*; 3rd ed., John Wiley and Sons, 1987.

Levin, Richard I.; *Statistics for Management;* 5th ed., New York: Prentice-Hall Pub., 1990.

Levin, Richard I.; *Statistics for Management*; 5th ed., New York: Prentice-Hall Inc., 1991.

Levin, Richard I. and David S. Rubin; *Statistics for Management*; 5th ed., New York: Prentice-Hall Inc., 1994.

Markridakis, S., S. C. Wheel Wright and E. McGee; *Forecasting, Methods and Application;* 2nd ed., Wiley and Sons Inc., 1983.

Mendenhall, Reinmuth, and Beaver; *Statistics for Management and Economics;* 6th ed., New York: Pws-kent Publishing Company, 1989.

Montgomery, D. C., L. A. Johnson and J. S. Gardiner; *Forecasting and Time Series;* New York: McGraw-Hill, 1990.

Neter, John, W. Wasserman and G. A. Whitmore; *Applied Statistics*; 3rd ed., Allyn and Bacon Inc., 1988.

New Bold, P.; *Statistics for Business and Economics;* 3rd ed., New Jersey: Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., 1991.

Rouncefield, Mary and Peter Holmes; *Practical Statistics*; London: Macmillan Education Ltd., 1991.

Shavelson, Richard J.; *Statistics Reasoning for Behavioral Sciences;* New York: Allyn and Bacon Inc., 1991.

Stuart, Alan; *Basic Ideas of Scientific Sampling*; 5th ed., New York, 1985.

Walpole, Ronald E.; *Probabilities and Applied Statistics;* Macmillan Publishing Co., 1985.

Winters, P.R.; "Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages", *Man. Sci.;* Vol. 6, 1960.

Wonnacott, Ronald J. and Thomas H. Wonnacott; *Introductory Statistics*; 4th ed., John Wiley and Sons, 1985.

واژه‌نامه

acceptance region ناحیه پذیرش
acceptance sampling نمونه‌گیری قابل قبول
alternative hypothesis فرض مقابل
analysis of variance (ANOVA) تحلیل واریانس
assumptions مفروضات
autocorrelation خودهمبستگی
bell-shaped distribution توزیع زنگی شکل
bias تورش (اریب)
biased estimator تخمین‌زنندهٔ اریب
block بلوک
block design طرح بلوکی
cell سلول
census سرشماری
central limit theorem قضیهٔ حد مرکزی
chi-square distribution توزیع کای - مربع
chi-square statistic آمارهٔ کای - مربع
cluster خوشه‌ای
cluster sampling نمونه‌گیری خوشه‌ای
coefficient of correlation ضریب همبستگی
coefficient of determination ضریب تعیین
comparative تطبیقی
confidence coefficient ضریب اطمینان
confidence interval فاصله اطمینان
confidence limits حدود اطمینان
contingency tables جداول توافقی
correlation همبستگی
critical region ناحیهٔ بحرانی
critical value مقدار بحرانی
data داده
degree of freedom درجهٔ آزادی
design طرح
determination تعیین (تشخیص)
efficiency کارآیی
error خطا
estimation theory نظریه تخمین
estimator تخمین‌زننده (برآوردکننده)
expected frequency فراوانی مورد انتظار
expected value امید ریاضی
experiment آزمایش
experimental design طرح آزمایش
F distribution توزیع F
finite population correction factor عامل اصلاح جامعهٔ محدود
F test آزمون F
goodness of fit نیکویی برازش
homogeneity test آزمون همگونی
H test آزمون H
hypothesis testing آزمون فرض
independence test آزمون استقلال

one factor analysis of variance تحلیل واریانس یک عامله
one tailed test آزمون یک دنباله
paired test آزمون مقایسه زوجی
parameter پارامتر
point estimation تخمین نقطه‌ای
population جامعهٔ آماری
population distribution توزیع جامعهٔ آماری
population mean میانگین جامعهٔ آماری
population proportion نسبت موفقیت جامعهٔ آماری
post-test پس آزمون
pre-test پیش آزمون
proportion نسبت
random digits table جدول اعداد تصادفی
random error خطای تصادفی
randomized block design طرح بلوکی تصادفی شده
random sampling نمونه گیری تصادفی
random variable متغیر تصادفی
rank correlation همبستگی رتبه‌ای
rank sum مجموع رتبه
regression رگرسیون
reliability پایایی
right-tailed test آزمون یک دنبالهٔ راست
runs test آزمون گردش (آزمون مبتنی بر ردیفها)
sample نمونه
sample mean میانگین نمونه
sample measurement اندازه‌های نمونه
sample proportion نسبت موفقیت در نمونه
sample size اندازه نمونه

inference استنباط
interval estimation تخمین فاصله‌ای
Kolmogorov-Smironov test آزمون کولموگوروف - اسمیرنوف
Kruskal-Wallis test آزمون کروسکال - والیس
least squares حداقل مربعات
left-tailed test آزمون یک دنباله چپ
level of significance سطح معنی‌دار بودن
linear correlation همبستگی خطی
linear regression رگرسیون خطی
lower confidence limit حد پایین اطمینان
Mann-Whitney U test آزمون U من - ویتنی
mathematical expectation امید ریاضی
mean square blocks (MSB) میانگین توان دوم بلوکها
mean square error (MSE) میانگین مجذور خطا
mean square treatments (MS(Tr)) میانگین توان دوم تیمارها
method of least squares روش حداقل مربعات
mid range نیم دامنه
MINITAB (بسته نرم‌افزار آماری)
multiple linear regression رگرسیون خطی چندگانه
nonlinear regression رگرسیون غیرخطی
nonparametric ناپارامتری
nonsymmetric نامتقارن
null hypothesis فرض صفر
observation مشاهده
observed frequency فراوانی مشاهده شده

sample space	فضای نمونه
sample variance	واریانس نمونه
sampling	نمونه گیری
SAS	(بسته نرم‌افزار آماری)
scatter diagram	نمودار پراکنش
signed-rank test	آزمون رتبهٔ علامت‌دار
significant level	سطح معنی‌دار
simple linear regression	رگرسیون خطی ساده
Spearman rank correlation	همبستگی رتبه‌ای اِسپیرمن
SPSS	(بسته نرم‌افزار آماری)
squared errors	مجذور خطاها
standard deviation	انحراف استاندارد
standard error of the estimator	خطای استاندارد تخمین‌زننده
statistic	آماره
statistical inference	استنباط آماری
statistic sampling distribution	توزیع نمونه گیری آماره‌ای
stratified sampling	نمونه گیری گروهی
student's T test	آزمون T استیودنت
sum of squares for blocks (SSB)	مجموع توانهای دوم بلوکها
sum of squares for errors (SSE)	مجموع توانهای دوم خطاها
sum of squares for treatments (SS(Tr))	مجموع توانهای دوم تیمارها
symmetric	متقارن
systematic sampling	نمونه گیری منظم
test of hypothesis	آزمون فرض آماری
trade off	بده - بستان
treatment	تیمار
T test	آزمون T
two-factors analysis of variance	تحلیل واریانس دو عامله
two tailed test	آزمون دو دنباله (دو طرفه)
type I error	خطای نوع اول
type II error	خطای نوع دوم
unbiased estimator	تخمین‌زنندهٔ ناارِیب
upper confidence limit	حد بالای اطمینان
U test	آزمون U
Wilcoxon signed-rank test	آزمون رتبهٔ علامت‌دار ویلکاکسن
Z test	آزمون Z

@Fileaccunting

کانال بایگانی فایل های حسابداری ، حسابرسی ، مالیاتی و مقالات
@Fileaccunting
مدیریت : امین یوسلیان

آمار و کاربرد آن در مدیریت

جلد دوم

تحلیل آماری

دکتر عادل آذر
دکتر منصور مؤمنی

تهران
۱۳۸۰

سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهها (سمت)